1.2 Kinetik des Massenpunktes

Bisher haben wir bei der Untersuchung der kinematischen Zusammenhänge die Ursache der Bewegung nicht berücksichtigt. Aus der Erfahrung wissen wir aber, dass Kräfte notwendig sind, um den Bewegungszustand zu ändern. Da wir uns zunächst auf den Massenpunkt beschränken, spielen freie Momente oder Momente von Kräften noch keine Rolle. Dies ändert sich, wenn wir in späteren Kapiteln zum ausgedehnten Körper übergehen.

Grundlage der Kinetik stellen die drei Newtonschen Grundgesetze dar. In der Statik und Festigkeitslehre hatten wir bereits das 3. Newtonsche Gesetz oder Wechselwirkungsgesetz kennengelernt, nach dem Kräfte immer paarweise auftreten.

Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio). Dieses Axiom soll auch stets bei bewegten Körpern gelten.

Das 1. Newtonsche Gesetz oder Trägheitsgesetz ist bereits von Galileo Galilei 1638 formuliert worden. Nach diesem Gesetz behält jeder Körper seine Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung so lange bei, wie er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern. Diese Erkenntnis löste die bis dato geltende, von den Griechen insbesondere Aristoteles [6] formulierte Aussage ab, dass jeder Körper, wenn er sich selbst überlassen bleibt, nach einer gewissen Zeit zur Ruhe kommen soll.

Die Erwähnung des Körpers in diesem Gesetz beinhaltet, dass eine gewisse Materiemenge oder Masse m betrachtet werden muss. In der Kinematik haben wir zwischen mathematischem Punkt und Massenpunkt nicht unterscheiden müssen. Wir idealisieren hier trotz der vorhandenen Masse einen Körper als punktförmiges Gebilde oder Punktmasse und vernachlässigen wie bisher jegliche Ausdehnung[7]. Es ist naheliegend, sich in diesem Zusammenhang die Masse des Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert zu denken. Neben der Masse findet der Geschwindigkeitsvektor im 1. Newtonschen Gesetz explizit Erwähnung.
Führen wir den Impuls $\vec{p} = m\,\vec{v}$ ein, so können wir das 1. Newtonsche Gesetz wie folgt formulieren:

Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so bleibt der Impuls des Körpers konstant:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}.$$

[6] Aristoteles galt bis zu den berühmten dynamischen Versuchen Galileis in den philosophischen Fakultäten als die oberste Autorität auch in Fragen der Naturlehre. Anders als Aristoteles begründete Galileo seine Aussagen auf der Basis von Beobachtungen und nicht auf Basis philosophischer Prinzipien oder Spekulationen. Damit begründete Galilei die moderne Naturwissenschaft.

[7] Einen realen, ausgedehnten Körper auf einen Punkt zu reduzieren, ist im Rahmen von kinematischen Betrachtungen ein gut begründbares Vorgehen, sobald die Strecken, über die sich ein Körper bewegt deutlich größer sind als die Abmessungen des Körpers selbst. Es ist dann ausreichend den Ort irgendeines Punktes des Körpers in Raum und Zeit zu verfolgen. Dass diese Vereinfachung bei der Anwendung des Newtonschen Bewegungsgesetz auch für ausgedehnte Körper begründet werden kann, werden wir im zweiten Teil der Kinetik, wenn wir auf ausgedehnte Körper eingehen, nachholen. Zunächst stellt sich bei einem ausgedehnten Körper sicher die Frage, ob nicht der Angriffspunkt einer Kraft oder dass es bei mehreren Kräfte verschiedene Angriffspunkte geben kann, eine entscheidende Rolle für den Bewegungsvorgang spielt. Außerdem ist ein ausgedehnter Körper ein hoch komplexes Gebilde, bei dem immer auch Kräfte zwischen einzelnen Teilen des Körpers auftreten. Der interessierte Leser mag mit der Kenntnis des 2. und 3. Newtonschen Gesetzes unter der Voraussetzung, dass ein Körper aus vielen Massenpunkten zusammengesetzt werden kann, unmittelbar eine Formulierung des 2. Newtonschen Gesetzes für Systeme von Massenpunkten ableiten, die zeigt, dass der Massenpunkt auch in der Kinetik eine brauchbare Vereinfachung darstellt, die viele Fragestellungen ausreichend beantwortet.

Das 2. Newtonsche Gesetz verknüpft die auf den befreiten Massenpunkt wirkenden Kräfte mit der Änderung seines Impulses. Eine gute Übersetzung des Originalmanuskripts Newtons lautet wie folgt:

Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt:

Bemerkungen:

Greifen mehrere Kräfte am Massenpunkt an, so ist $\vec{F}$ durch die Summe der Kräfte zu ersetzen bzw. als Resultierende aller Kräfte aufzufassen.

Ist die Masse des Körpers konstant, so kann sie vor das zeitliche Differential treten und man erhält mit der Definition der Beschleunigung

$$m\,\vec{a} = \vec{F}.$$

Bevor Newton diese drei Grundgesetze formulierte, hat er in seinem Buch, das Konzept vom absoluten Raum und von der absoluten Zeit einführen müssen. Schon das Trägheitsgesetz beinhalte das Problem, dass es einen Bezugskörper und ein Raum- und ein Längenmaß geben muss, bezüglich derer das Trägheitsgesetz gilt. Wir wollen diese Problematik hier nicht näher beleuchten und uns damit behelfen, dass wir ein Bezugssystem als absolutes bezeichnen in dem das Trägheitsgesetz gilt. Wegen des 2. Newtonschen Gesetzes sind damit aber alle Bezugssysteme zugelassen, die sich bezüglich eines ruhenden Bezugspunktes im absoluten Raumes mit nach Betrag und Richtung konstanter Geschwindigkeit bewegen, solche Systeme heißen Inertialsysteme. Ein Inertialsystem, das im absoluten Raum ruht, konnte Newton nicht angeben. Seine Existenz hat er postuliert, damit aber die eigentliche Problematik nicht gelöst. Den bisher besten Lösungsansatz hat Einstein mit seiner allgemeinen Relativitätstheorie geliefert.

Im Folgenden wollen wir stets voraussetzen, dass wir ein solches Inertialsystem angeben können bzw. dass unser benutztes Bezugssystem stets eine ausreichend gute Annäherung an ein solches Inertialsystem darstellt.

Zusammenfassung

1. In einem im absoluten Raum ruhenden Bezugssystem gilt für den Massenpunkt mit Masse m für die Änderung der Bewegungsgröße $\vec{p}_{\text{abs}} = m\,\vec{v}_{\text{abs}}$ das 2. Newtonsche Gesetz:

2. Inertialsysteme sind Bezugssysteme, die sich relativ zum Absolutsystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegen:

   In Inertialsystemen gilt das 2. Newtonsche Gesetz mit $\vec{p} = m\,\vec{v}_{rel}$

3. Technische Inertialsysteme sind Bezugssysteme, in denen das 2. Newtonsche Gesetz für die Aufgabenstellung hinreichend genau gilt.

Übung

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Transformationsregel zwischen relativ zueinander bewegten Bezugssystemen, dass das 2. Newtonsche Gesetz unverändert gilt, wenn wir von einem Bezugssystem, dass im absoluten Raum ruht, auf ein Bezugssystem, dass sich relativ zu diesem mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{rel}} = const$ bewegt, übergehen und dass verschiedene solche Systeme bzgl. des 2. Newtonschen Gesetzes äquivalent sind.

2. Diskutieren Sie, ob ein erdgebundenes Labor ein Inertialsystem darstellt bzw. inwiefern ein solches Labor als Inertialsystem gelten kann!

    In welchen Fällen ist ein solches erdgebundenes Koordinatensystem kein brauchbares Inertialsystem?

    Welche alternativen Bezugssysteme schlagen Sie für ihre Beispiele vor, die ein brauchbares Inertialsystem darstellen würden?

1.2.1 Maßsysteme

Wir beschränken uns auf das Internationale Einheitensystem.
Gewählte Grundeinheit der Masse: 1 Kilogramm = 1 kg = Masse des Urkilogramms in Paris (entspricht 1 dm^3 Wasser bei festgelegtem Druck und festgelegter Temperatur.

Abgeleitete Einheit der Kraft: 1 kg $\cdot$ 1 $\mathrm{m/s}^2$ = 1 Newton = 1 N

Demnach ist 1 N die Kraft die der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 $\mathrm{m/s}^2$ erteilt.

1.2.2 Grundaufgaben der Dynamik

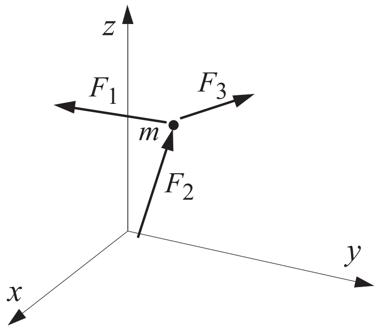
Art der Bewegung	Merkmale der Kräfte	gegeben	gesucht
frei	nur Fernkräfte, von Kinematik unabhängig	alle Kräfte	Kinematik
geführt	teils gegeben, teils durch Kinematik bestimmt	Bahn, einige Kräfte	Kinematik, restliche Kräfte
erzwungen	durch Kinematik bestimmt	Kinematik	alle Kräfte

Erstes Beispiel für freie Bewegung

Auf einen Massenpunkt der Masse m wirken drei Kräfte $\vec{F}_1$ bis $\vec{F}_3$.

Es ist die absolute Beschleunigung $\vec{a}$ des Massenpunktes zu bestimmen für die beiden Fälle $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \neq \vec{0}$ und $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \equiv \vec{0}$.

Lageplan



Vektorplan

Lösung

Wir wählen in einem Lageplan ein kartesisches Absolut- oder Inertialsystem. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz gilt

In einem Vektorplan lassen sich die maßstäblich dargestellten Kraftvektoren zu einer Resultierenden zusammenfassen. Nach dem Newtonschen Gesetz ist die Resultierende dem Produkt aus Masse m und Beschleunigung a proportional. Wir erhalten daher die Richtung und den Richtungssinn der Beschleunigung und ferner die Absolutbeschleunigung zu

Die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Massenpunktes spielt keine Rolle.

Im Spezialfall, dass $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ wird die Beschleunigung Null: $\vec{a} = \vec{0}$

In diesem Fall ändert sich die Geschwindigkeit des Massenpunktes nicht: $\vec{v} = const.$

Sind die Kräfte zeitlich konstant, so bewegt sich demnach der Massenpunkt auf einer geraden Linie im <u>absoluten</u> Raum mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = const \quad \Rightarrow \quad$ 1. Newtonsches Gesetz oder Trägheitsgesetz.

Zweites Beispiel für freie Bewegung

Ein Stein wird im Schwerefeld der Erde mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ senkrecht nach oben geworfen. Luftreibung soll vernachlässigt werden und die Abwurfgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ soll so klein sein, dass die maximale Flughöhe h im Verhältnis zum Radius der Erde R vernachlässigbar klein sein: $h << R$

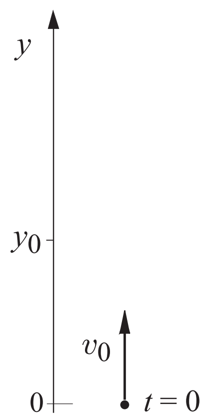
Gesucht ist die Beschleunigung des Steines,und die Flughöhe h, die er erreichen kann.

Lösung

Wir betrachten den Stein an einer Position zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ und wählen ein mit der Erde verbundenes Koordinatensystem, dessen y-Achse in Richtung der Abwurfgeschwindigkeit orientiert sein soll. Da nach Voraussetzung $h << R$ gilt, soll das erdgebundene Koordinatensystem ein für die Aufgabenstellung brauchbares Inertialsystem darstellen. Außerdem kann die Erdbeschleunigung und damit das Gewicht des Steines näherungsweise als konstant betrachtet werden.

Im Freischnitt tragen wir die auf den Stein wirkenden Kräfte an, hier ausschließlich die Gewichtskraft $\vec{G}$. Da wir unser Koordinatensystem als Inertialsystem akzeptieren wollen, muss die gesuchte Beschleunigung in Richtung der Wirkungslinie der Gewichtskraft liegen. Wir definieren deshalb den Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ in y-Richtung wie eingetragen.

Freischnitt



Es gilt mit dem 2. Newtonschen Gesetz für die y-Richtung

Sind die Kräfte zeitlich konstant, so bewegt sich demnach der Massenpunkt auf einer geraden Linie im absoluten Raum mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = const \quad \Rightarrow \quad$ 1. Newtonsches Gesetz oder Trägheitsgesetz.
Daraus folgt für die Beschleunigung $a = -g$, wie wir es bereits beim freien Fall im Abschnitt Kinematik **??** vorausgesetzt haben.

Nach Integration erhalten wir wieder das Weg-Zeit-Gesetz für konstante Beschleunigung

wobei wir $t_0 = 0$ und $y(t_0) = 0$ gesetzt haben.

Für die Geschwindigkeit erhalten wir

Die maximale Flughöhe h wird erreicht, zum Zeitpunkt t_h, bei dem die Geschwindigkeit Null ist:

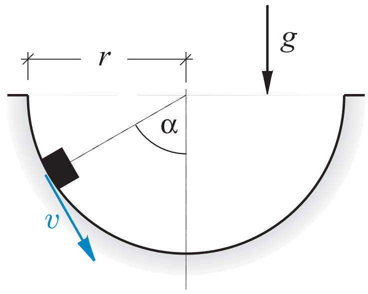
Damit errechnet sich die Flughöhe zu

Beispiel für geführte Bewegung

Ein Klotz gleitet in einer Halfpipe mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$ beim Winkel α. Der Gleitreibungskoeffizient sei μ_{G}.

Die Ausdehnung des Klotzes kann gegenüber dem Radius der Halfpipe vernachlässigt werden.

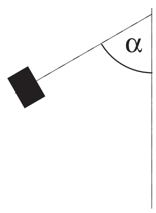
Gesucht sind die Beschleunigung $\vec{a}$ des Klotzes und alle Kräfte auf den Klotz in der gezeichneten Position.



Lösung

Wir schneiden den Klotz frei. Neben der Gewichtskraft $\vec{G}$ greifen von der Umgebung die Normalkraft $\vec{N}$ und die Reibkraft $\vec{R}$, wobei die Reibkraft der momentanen Bewegungsrichtung entgegengesetzt angenommen wird und die Normalkraft als Druckkraft.

Freischnitt

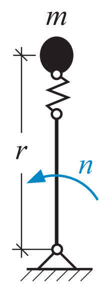


Das Newtonsche Bewegungsgesetz in die tangentiale und die normale Richtung liefert:

Dies sind genau vier Gleichungen für die Unbekannten a_t, a_n, N, R. Man erkennt, dass N für alle Winkel α stets positiv ist und damit auch die angenommene Reibkraft möglich ist. Ferner sehen wir, dass die Gewichtskraftkomponente positiv zur Tangentialbeschleunigung beiträgt, die Reibkraft dagegen verkleinert die Tangentialbeschleunigung.

Beispiel für erzwungene Bewegung: Bestimmung der trägen Masse eines Körpers

Zur Bestimmung der trägen Masse eines Körpers wird dieser an einem Seil befestigt und mit konstanter Drehzahl n auf einer Kreisbahn mit Radius r geführt. Zwischen Seil und Massenpunkt ist außerdem eine Federwaage platziert mit der die Kraft vom Körper F auf das Seil gemessen werden soll, um daraus die träge Masse m des Körpers zu bestimmen.



Annahmen: Der Körper soll als Massenpunkt betrachtet werden dürfen und die Eigenmasse der Elemente der Federwaage sollen vernachlässigt werden.

Geg.: $F\,,\ r\,,\ n$

Zahlenwerte: $F = 1275,35\ \mathrm{N}\,,\ R = 4\ \mathrm{m}\,,\ n = 780/\mathrm{min}$

Ges.: Die Masse m des Körpers.

Lösung

Wir schneiden den Körper frei. Als einzige Kraft greift die von der Federwaage ermittelte Zentripetalkraft $\vec{F}$ am Körper an.

Das Newtonsche Bewegungsgesetz in die normale Richtung liefert:

Freischnitt

Für die Masse ergibt sich:

Übung: Aufzug in die Erdumlaufbahn

Es wird diskutiert unter Ausnutzung hochfester Materialien wie zum Beispiel Nanoröhren am Äquator einen Aufzug in die Erdumlaufbahn zu bewerkstelligen, indem die Erdrotation ausgenutzt wird, um eine solche Nanoröhre aufzuspannen.

Annahme: Die Wechselwirkung des Seiles mit der Atmosphäre soll vernachlässigt werden.

Geg.: Radius R_E und Umdrehungszeit T_E der Erde, Erdbeschleunigung g_E auf Meeresspiegelniveau

Zahlenwerte:

$R_\mathrm{E} = 6370\ \mathrm{km}\,,\ T_\mathrm{E} = 24\ \mathrm{h}\,,\ g_\mathrm{E} = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

Ges.:

a) Bei welcher Mindestlänge $l = l_\mathrm{min}$ würde sich die Nanoröhre bei Vernachlässigung ihrer Eigenmasse durch eine angehängte Masse spannen?

b) Welche Auflagerkraft ergibt sich am Befestigungspunkt in Abhängigkeit von der Länge der Nanoröhre?

c) Welche Länge l muss eine Nanoröhre mit konstanter Masse pro Länge $\mu = m/l$ mindestens haben, damit sie sich ohne angehängte Masse von alleine spannt?

Im Online-Magazin des Spiegels findet sich am 14.04.2011 folgender Artikel:

SPIEGEL ONLINE

14. April 2011, 13:41 Uhr
Weltraumtrümmer
Metallwolke soll Schrott vom Himmel holen

Mit Wolframpartikeln wollen Forscher gegen bedrohlichen Weltraumschrott kämpfen: Die Metallteilchen sollen sich an die vagabundierenden Trümmer legen - und sie abstürzen lassen. Doch der kühne Plan birgt Gefahren.

Washington - Der Müll fliegt hoch über unseren Köpfen. Er ist nicht zu sehen, doch zumindest für die Raumfahrt gefährlich. Zehntausende Trümmerstücke in Umlaufbahnen um die Erde bedrohen beständig Satelliten und die Internationale Raumstation. Forscher haben nun einen Plan vorgestellt, wie das Problem eines Tages gelöst werden könnte. Sie setzten auf eine gigantische Wolke aus winzigen Metallpartikeln - und zwar am besten aus Wolfram.

Forscher vom US Naval Research Laboratory interessieren sich für das Material, weil es fast doppelt so schwer wie Blei ist. Im Orbit soll sich das Wolfram an die kleineren Schrottteile heften und deren Gewicht deutlich erhöhen. Denn je schwerer ein Trümmerstück ist, desto eher verliert es an Höhe und kann in der Erdatmosphäre verglühen.

"Wir stellen uns eine Staubwolke in einem Orbit zwischen 900 und 1100 Kilometern Höhe vor", erläutern Gurudas Ganguli und seine Kollegen ihre Idee auf der Website arxiv.org. Das ist ein Portal, das Wissenschaftler nutzen, um ihre Arbeiten schon vor dem Erscheinen in Fachmagazinen publik zu machen.
…

a) Kann die Idee in der beschriebenen Weise funktionieren?

b) Welchen Effekt könnte die Anlagerung von Partikeln haben und warum führt dies dann tatsächlich zu einem beschleunigten Absturz?