Aufgabe 1 F21 Teile A und B (13 + 14 Punkte)

A) Die Freie Energie A eines Stoffgemisches mit k-Komponenten soll in der Form $A = A(\Omega, n_1, \ldots, n_k)$ mit der neuen extensiven Zustandsvariablen Ω und den Stoffmengen n_i, $i = 1, \ldots, k$ dargestellt werden.

Ges.:

a) Warum gilt notwendigerweise der Zusammenhang $A = \Omega + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \, n_i$?

b) Wie sind demnach die Chemischen Potentiale μ_i definiert?

c) Wie lautet die Fundamentalgleichung für das Thermodynamische Potential Ω?

d) Welches sind die natürlichen Variablen des Potentials Ω und durch welche thermodynamischen Zustandsvariablen lassen sich die partiellen Ableitungen des Potentials Ω nach seinen natürlichen Variablen ausdrücken?

e) Warum gelten die Beziehungen $\left(\dfrac{\partial S}{\partial \mu_i}\right)_{T,p} = \left(\dfrac{\partial n_i}{\partial T}\right)_{p,\mu_i}$, $i = 1, \ldots, k$?

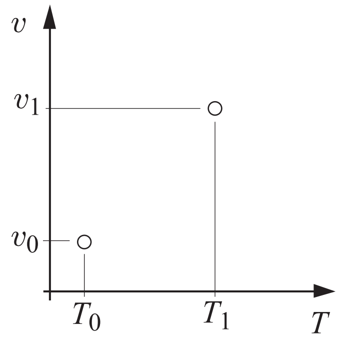
B) Betrachten Sie folgende Zustandsgleichung eines realen Gases:

$$p = \frac{R\,T}{v} - \frac{a}{v^2\,T^{1/2}} \quad \text{mit} \quad a = const$$

Ges.:

a) Leiten Sie folgende drei Beziehungen her:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \quad \text{sowie} \quad c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$$



b) Bestimmen Sie das vollständige Differential $\mathrm{d}u(T, v)$ der spezifischen Inneren Energie, wobei Sie den Zusammenhang

$$c_v = g(T) + \frac{3}{4}\frac{a}{vT^{3/2}}$$

benutzen sollen!

c) Bestimmen Sie die kalorische Zustandsfunktion $u = u(T, v)$ der spezifischen Inneren Energie!
Hinweis für die Integration der differentiellen Zustandsgleichung $\mathrm{d}u$ aus b) kann wie folgt vorgegangen werden: Integrieren Sie das Vollständige Differential $\mathrm{d}u(T, v)$ auf einem geeigneten Integrationsweg vom Punkt T_0, v_0 bis T_1, v_1, wobei $u(T_0, v_0) = u_0$ sein soll. Tragen Sie den gewählten Integrationsweg in der vorgegebenen v, T-Ebene ein und begründen Sie, warum das so erhaltene Integral $u = u(T, v)$ ein allgemeingültiges Ergebnis darstellt!

d) Bestimmen Sie das vollständige Differential $\mathrm{d}s(T, v)$ der spezifischen Entropie!

e) Weisen Sie nach, dass bei diesem Gasmodell die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen mit einer noch offenen Temperaturabhängigkeit $g(T)$ tatsächlich durch

$$c_v = g(T) + \frac{3}{4}\frac{a}{vT^{3/2}}$$

ausgedrückt werden kann!

f) Interpretieren Sie die Funktion $g(T)$, indem Sie mit dem Idealen Gas vergleichen!