

Lösung Aufgabe 11a

a) 1. Verlustlose Bewegung \Rightarrow Energieerhaltungssatz:¹

$$T(\varphi) + V(\varphi) = T_0 + V_0 + \sum W|_0^\varphi$$

Bezogen auf den ruhenden Punkt B:

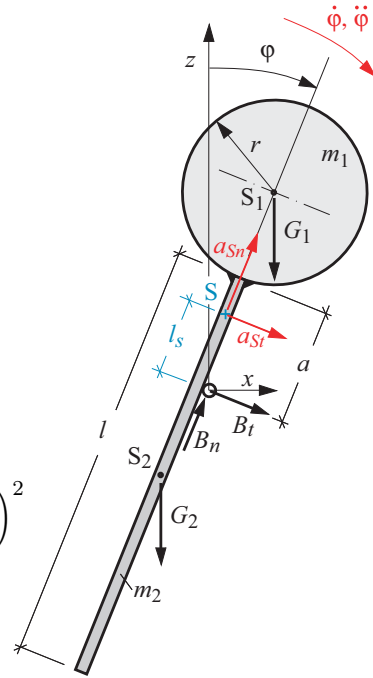
$$(1) \quad \frac{1}{2} J_{B_1} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_{B_2} \dot{\varphi}^2 = (m_1 + m_2) g (z_s(\varphi = 0) - z_s(\varphi))$$

mit

$$z_s(\varphi = 0) - z_s(\varphi) = l_s (1 - \cos \varphi)$$

und

$$\begin{aligned} J_B &= J_{B_1} + J_{B_2} = J_{S_1} + m_1 (a + r)^2 + J_{S_2} + m_2 \left(\frac{l}{2} - a\right)^2 \\ (2) \quad &= \frac{1}{2} m_1 r^2 + m_1 (a + r)^2 + \frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 \left(\frac{l}{2} - a\right)^2 \\ &\stackrel{\text{hier}}{=} \frac{23}{2} m_1 r^2 \end{aligned}$$



sowie

$$(3) \quad l_s = \frac{m_1 (a + r) - m_2 \left(\frac{l}{2} - a\right)}{m_1 + m_2} \stackrel{\text{hier}}{=} -\frac{1}{4} r < 0.$$

Insbesondere die Nichtlinearität bzgl. der Ableitung wird üblicherweise eliminiert. Nach zeitlicher Ableitung erhält man

$$J_B \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = g l_s \sin \varphi \dot{\varphi}.$$

Diese Gleichung ist außer für den uninteressanten Fall $\dot{\varphi} = 0$ erfüllt, falls

$$J_B \ddot{\varphi} = g l_s \sin \varphi,$$

bzw.

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{J_B} (m_1 + m_2) l_s \sin \varphi = 0.$$

Dies liefert mit den Angaben der Aufgabenstellung

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{23} \frac{g}{r} \sin \varphi = 0$$

2. Drallsatz um im Inertialsystem ruhenden Punkt B:²

$$(4) \quad J_B \ddot{\varphi} = m_1 g (a + r) \sin \varphi - m_2 g \left(\frac{l}{2} - a\right) \sin \varphi$$

Damit haben wir dasselbe Ergebnis erzielt, wie mittels des Energieerhaltungssatzes.

¹Alternativen für die Formulierung der kinetischen Energien:

- bez. auf einen im Bezugssystem ruhenden Punkt
- bez. auf den Schwerpunkt

²Alternativen für die Formulierung des Drallsatzes:

- bez. auf einen in einem Inertialsystem ruhenden Punkt
- bez. auf den Schwerpunkt

b) Aus der Differentialgleichung liest man den Parameter

$$\omega_0^2 = \frac{g}{J_B} \left(m_1 (a + r) - m_2 \left(\frac{l}{2} - a \right) \right) = -\frac{g}{J_B} (m_1 + m_2) l_s \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{2}{23} \frac{g}{r}$$

Falls ω_0^2 positiv ist, kann dieser Parameter als Eigenkreisfrequenz einer Schwingung interpretiert werden. Dies ist dann der Fall, falls der Gesamtschwerpunkt des Systems unterhalb der Lagerung bei B liegt. Dies erfordert $l_s < 0$, was hier mit $l_s = -1/4 r$ tatsächlich vorliegt.

Dies setzt eine Schranke für den Abstand a . Man erhält

$$l_s = \frac{m_1 (a + r) - m_2 \left(\frac{l}{2} - a \right)}{m_1 + m_2} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \leq \frac{\frac{l}{2} m_2 - r m_1}{m_1 + m_2} = a_{\max} \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{5}{4} r = 0,1875 \text{ m.}$$

Die Eigenkreisfrequenz wird dann

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g (m_1 + m_2) (-l_s)}{J_B}} \stackrel{\text{hier}}{=} \sqrt{\frac{2}{23} \frac{g}{r}} \approx 2,4 \frac{1}{\text{s}}.$$

Zwischen Eigenkreisfrequenz und Schwingungsdauer T besteht der Zusammenhang

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 2,6 \text{ s.}$$

c) Zur Lösung wird die Differentialgleichung vollständig linearisiert, indem $\sin \varphi \approx \varphi$ gesetzt wird. Für kleine Ausschläge des Pendels lautet die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

Der Lösungsansatz

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \psi)$$

stellt eine allgemeine Lösung der Schwingung mit Amplitude φ_0 und Phasenverschiebung ψ dar. Diese allgemeine Lösung erfüllt die gesetzten Anfangsbedingungen

$$\varphi(t=0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0,$$

falls die Phasenverschiebung $\psi = 0$ ist. Die spezielle Lösung lautet daher:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$$

d) Für die Auflagerreaktionen stehen noch der Schwerpunktsatz und der Drallsatz um den Schwerpunkt S zur Verfügung.

Drallsatz um Schwerpunkt S:

$$J_S \ddot{\varphi} = -B_t l_s$$

mit

$$J_S = J_B - (m_1 + m_2) l_s^2 \quad \text{und} \quad \ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin \varphi$$

Ausrechnung liefert

$$B_t = \left(1 - \frac{(m_1 + m_2) l_s^2}{J_B} \right) (m_1 + m_2) g \sin \varphi \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{90}{23} m_1 g \sin \varphi.$$

Das Ergebnis lässt sich noch durch Anwendung des Schwerpunktsatzes in tangentielle Richtung überprüfen.

Interessant an diesem Ergebnis ist, dass für die spezielle Wahl $J_B = (m_1 + m_2) l_s^2$ also

$$J_{S_1} + m_1 (a + r)^2 + J_{S_2} + m_2 \left(\frac{l}{2} - a\right)^2 \stackrel{!}{=} \frac{\left(m_1 (a + r) - m_2 \left(\frac{l}{2} - a\right)\right)^2}{m_1 + m_2}$$

die Auflagerkraft für alle Winkel φ verschwindet. In diesem Fall ist die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_s}}$$

mit derjenigen des mathematischen Pendels mit einer Punktmasse am Faden der Länge l_s identisch. Eine solche Anordnung ist erstrebenswert um Querkräfte an Drehlagern, zum Beispiel bei Drehtüren, zu vermeiden.

Der Schwerpunktsatz in normale Richtung liefert

$$(m_1 + m_2) a_{S_n} = B_n - (m_1 + m_2) g \cos \varphi$$

mit

$$a_{S_n} = -l_s \dot{\varphi}^2$$

und

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{2(m_1 + m_2) g l_s (1 - \cos \varphi)}{J_B} \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{4}{23} \frac{g}{r} (1 - \cos \varphi)$$

aus Gl. (1). Also ergibt sich

$$B_n = (m_1 + m_2) g \left(\cos \varphi - \frac{2(m_1 + m_2) l_s^2 (1 - \cos \varphi)}{J_B} \right) \stackrel{\text{hier}}{=} 4 m_1 g \left(\cos \varphi - \frac{1 - \cos \varphi}{23} \right).$$

e) Die Beantwortung dieser Frage erfordert einen weiteren Freischnitt zum Beispiel der Scheibe 1.

Hier gilt:

$$m_1 a_{S_1 t} = Q_A + m_1 g \sin \varphi \quad \text{mit} \quad a_{S_1 t} = +(a + r) \ddot{\varphi}$$

$$m_1 a_{S_1 n} = -L_A - m_1 g \cos \varphi \quad \text{mit} \quad a_{S_1 n} = -(a + r) \dot{\varphi}^2$$

$$J_{S_1} \ddot{\varphi} = -Q_A r + M_A$$

Darin sind die Schnittreaktionen die einzigen Unbekannten.

