Musterlösung Übungsklausur Mechanik II SS17

Aufgabe D1 (11 Pkte)

a)

$$[k] = [\frac{\sqrt{v}}{a}] = \frac{\sqrt{\mathrm{m/s}}}{\mathrm{m/s^2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}}}$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = a \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\,t = k\frac{\mathrm{d}\,v}{v^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad t = k\int \frac{\mathrm{d}\,v}{v^{1/2}} = 2kv^{1/2} + C_0$$

C_0 aus Anfangsbedingung: $\quad t = 0: \quad v = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_0 = -2kv_0^{1/2}$

$$v = \left(\frac{t}{2k} + \sqrt{v_0}\right)^2$$

c)

$$\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} = v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\,s = v\mathrm{d}\,t \quad \Rightarrow \quad s = \int v\mathrm{d}\,t = \int \left(\frac{t}{2k} + \sqrt{v_0}\right)^2 \mathrm{d}\,t$$

$$s = \int \left(\frac{t}{2k} + \sqrt{v_0}\right)^2 \mathrm{d}\,t = \frac{2}{3}\,k\left(\frac{t}{2k} + \sqrt{v_0}\right)^3 + C_1$$

C_1 aus Anfangsbedingung: $\quad t = 0: \quad s = s_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = s_0 - 2/3\,k\,v_0^{3/2}$

$$s = s_0 + \frac{2k}{3}\left[\left(\frac{t}{2k} + \sqrt{v_0}\right)^3 - \sqrt{v_0}^3\right]$$

$$s_1 = s(t_1) = s_0 + \frac{2k}{3}7\sqrt{v_0}^3$$

d)

$$\begin{aligned} v_1 = v(t_1) &= 4\sqrt{v_0}^2 = 4v_0 \\ a_1 = a(t_1) &= \frac{\sqrt{v_1}}{k} = \frac{2\sqrt{v_0}}{k} = 2a(0) \end{aligned}$$

e)

Leistung: $\quad P = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$$\Rightarrow \quad P_1 = ma_1\,v_1 = m2\sqrt{v_0}/k\;4(\sqrt{v_0})^2 = 8m/k\sqrt{v_0}^3$$

Aufgabe D2 (42 Pkte)

a) Kinematische Beziehungen (Euler)

$$\vec{a}_{S_1} = \vec{a}_C + \vec{a}_{S_1,C}$$

Geometrie: $\sin\varphi_1 = \cos\varphi_1 = 1/2\,\sqrt{2}$

Momentane Lage: $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$

Tangentialkomponente:

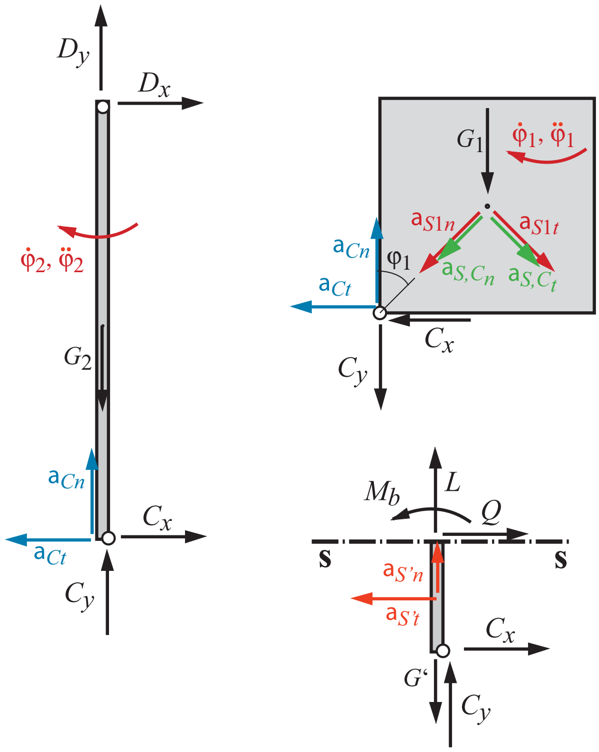
$$a_{S1_t} = -\overset{0}{\cancel{a_{Cn}}}\,\sin\varphi_1 - a_{Ct}\cos\varphi_1 + a_{S1,C_t} =$$

$$= -2b\ddot{\varphi}_2\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{b}{2}\sqrt{2}\ddot{\varphi}_1 = b\sqrt{2}\,(\frac{\ddot{\varphi}_1}{2} - \ddot{\varphi}_2)$$

Normalkomponente:

$$a_{S1_n} = -\overset{0}{\cancel{a_{Cn}}}\,\cos\varphi_1 + a_{Ct}\sin\varphi_1 + \overset{0}{\cancel{a_{S1,C_n}}} =$$

$$= b\sqrt{2}\ddot{\varphi}_2$$



b) Kinetische Beziehungen (Schwerpunktsätze und Drallsätze für die starren Körper)

Scheibe: Drallsatz um S_1 und Schwerpunktsatz in tangentiale und normale Richtung
Balken: Drallsatz um D

$$\begin{aligned}
J_{S1}\,\ddot{\varphi}_1 &= (C_x - C_y)\,b/2 \\
m_1\,a_{S1_t} &= (-C_x + C_y + G_1)\,\sqrt{2}/2 &&= m_1\,b\sqrt{2}\,(\ddot{\varphi}_1/2 - \ddot{\varphi}_2) \\
m_1\,a_{S1_n} &= (C_x + C_y + G_1)\,\sqrt{2}/2 &&= m_1\,b\sqrt{2}\,\ddot{\varphi}_2 \\
J_D\,\ddot{\varphi}_2 &= -C_x\,2b
\end{aligned}$$

Dies sind vier Gleichungen für vier Unbekannte.
Aus (2) und (3) lässt sich C_y eliminieren. Mit der erhaltenen Gleichung und Gleichung (4) folgt für das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen:

$$\frac{\ddot{\varphi}_1}{\ddot{\varphi}_2} = \frac{J_D + 4m_1b^2}{m_1b^2} = \frac{1/3m_2b^2 + m_2b^2 + 4m_1b^2}{m_1b^2} \overset{m_2=3/2m_1}{=} 6$$

c) Aus Unterpunkt b) seien C_x, C_y sowie $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2$ gegeben. Dann folgt für den Freischnitt des Balkenabschnitts von **S** : **S** bis C mit $m_2' = \dfrac{1}{4}\, m_2$ und $J_{\mathrm{S}_2'} = \dfrac{1}{12}\, m' \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$:

$$0 = L - G' + C_y \qquad \Rightarrow \qquad L = m_2' g - C_y$$

$$m_2' \, (\frac{3}{2} + \frac{1}{4}) b \, \ddot{\varphi}_2 = -Q - C_x$$

$$J_{\mathrm{S}_2'} \, \ddot{\varphi}_2 = -C_x \, \frac{b}{2} + Q \, \frac{b}{2} - M_b$$

$$\Rightarrow \quad M_b = (Q - C_x) \frac{b}{2} - J_{S'2} \ddot{\varphi}_2 \qquad = \qquad -\,(J_{S'2} + \frac{7}{32} m_2 b^2) \, \ddot{\varphi}_2 - C_x \, b$$

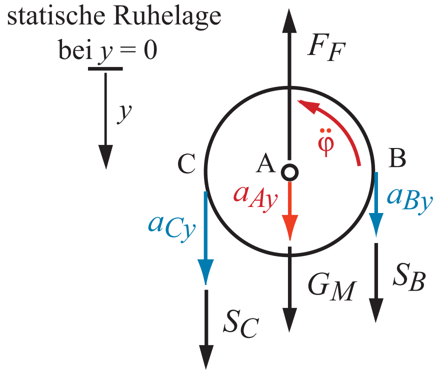
Hinweis: Die Lösung lautet für C_x, C_y sowie $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2$:

$$C_x = -\frac{m_1 g}{6} \quad , \quad C_y = -\frac{m_1 g}{2}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{g}{b} \quad , \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{6} \frac{g}{b}$$

Aufgabe D3 (31 Pkte)

a) Euler: $\vec{a}_\mathrm{A} = \vec{a}_\mathrm{B} + \vec{a}_\mathrm{A,B}\,, \quad \vec{a}_\mathrm{C} = \vec{a}_\mathrm{B} + \vec{a}_\mathrm{C,B}$



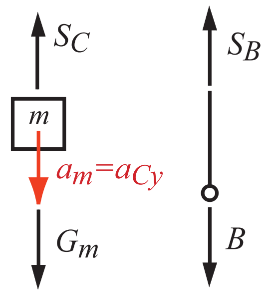
Komponenten in y-Richtung:

$$a_{\mathrm{A}y} = \overset{0}{\cancel{a_{\mathrm{B}y}}} + r\ddot{\varphi}$$

$$a_{\mathrm{C}y} = \overset{0}{\cancel{a_{\mathrm{B}y}}} + 2r\ddot{\varphi}$$

$\Rightarrow \quad a_{\mathrm{C}y} = 2a_{\mathrm{A}y} = 2r\ddot{\varphi}$

b) Nicht die statische Ruhelage aber die Bewegung des Systems ist unabhängig davon, ob das System in einem Schwerefeld oder im schwerelosen Raum schwingt, sofern das Schwerefeld in vertikaler Richtung wirkt. Um dies zu zeigen - nicht Gegenstand der Aufgabenstellung - sollen die Gewichtskräfte berücksichtigt werden. Die Federkraft und die Seilkraft besitzen dann einen statischen und einen dynamischen Anteil, wobei in der Schwerelosigkeit die statischen Anteile Null sind.



Aus Freischnitten in gegenüber der statischen Ruhelage ausgelenkter Lage:

$$m\,a_m = +G_m - S_\mathrm{C} = +G_m - (S_{\mathrm{C}s} + S_{\mathrm{C}d}) = -S_{\mathrm{C}d} = m\,a_{\mathrm{C}y} \quad \text{mit} \quad S_{\mathrm{C}s} = G_m$$

$$\Rightarrow \quad m\,m\,a_{\mathrm{C}y} = -S_{\mathrm{C}d}$$

$$M\,a_{\mathrm{A}y} = +G_M + S_\mathrm{C} + S_\mathrm{B} - F_F = +G_M + S_{\mathrm{C}s} + S_{\mathrm{C}s} + S_{\mathrm{C}d} + S_{\mathrm{C}d} - (F_{Fs} + F_{Fd})$$

$$\text{mit} \quad F_{Fs} = G_M + 2G_m\,, \quad F_{Fd} = c\,y_\mathrm{A} = c\,\frac{y_\mathrm{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad M\,a_{\mathrm{A}y} = S_{\mathrm{C}d} + S_{\mathrm{B}d} - F_{Fd} = \frac{M}{2}\,a_m\,,$$

$$J_\mathrm{S}\,\ddot{\varphi} = (S_\mathrm{C} - S_\mathrm{B})\,r = (S_{\mathrm{C}s} - S_{\mathrm{B}s} + S_{\mathrm{C}d} - S_{\mathrm{B}d})\,r = J_\mathrm{S}\frac{a_m}{2r}$$

$$\Rightarrow \quad J_\mathrm{S}\,\ddot{\varphi} = (S_{\mathrm{C}d} - S_{\mathrm{B}d})\,r = J_\mathrm{S}\frac{a_m}{2r}$$

$$\Rightarrow \quad (\frac{M}{2} + 2m + \frac{J_S}{2r^2})\,a_m = -F_{Fd} = -c\,y_M = -c\,\frac{y_m}{2} \quad \text{mit} \quad a_m = \ddot{y}_m$$

oder

$$\Rightarrow \quad (\frac{M}{2} + 2m + \frac{J_S}{2r^2})\,r\,\ddot{\varphi} = -F_{Fd} = -c\,y_M = -c\,r\,\frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Eigenkreisfrequenz: } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J_S/r^2 + M + 4m}}$$

c)

$$B = B_s + B_d = S_B = S_{Bs} + S_{Bd} \quad \text{mit} \quad B_s = S_{Bs} = mg$$

$$\Rightarrow \quad B_d = S_{Bd} = -(2m + \frac{J_S}{r^2})\, r\, \ddot{\varphi} \quad \text{mit} \quad r\, \ddot{\varphi} = -\frac{c\, r\, \varphi}{M + 4m + J_S/r^2}$$

d) Lösungsansatz: $y_m = y_0 \cos(\omega_0 t - \psi)$

Anfangsbedingungen:

$t = 0: \quad y_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \pi/2$

$t = 0: \quad \dot{y}_m = v_0 = -y_0\omega_0 \sin(-\pi/2) = y_0\omega_0\,, \quad \Rightarrow \quad y_0 = v_0/\omega_0$

Die Lösung lautet:

$$y_m = v_0/\omega_0 \cos(\omega_0 t - \pi/2) = v_0/\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$