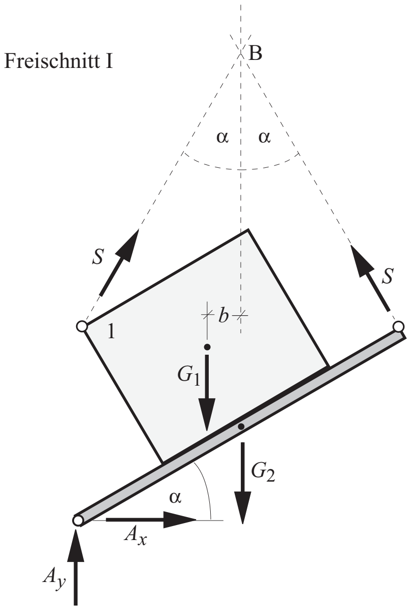
Musterlösung Mechanik I WS12

Aufgabe S1 F12 (26 Punkte)

a) Auflagerreaktionen bei A und Seilkraft



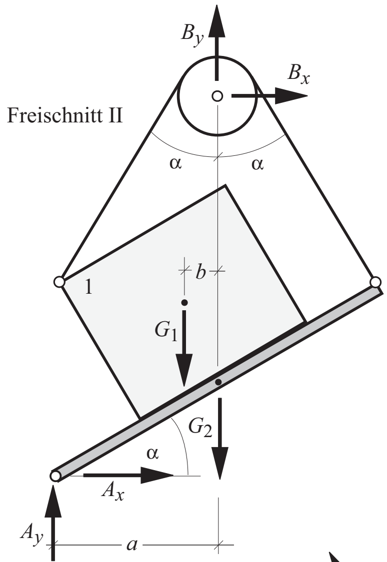
Freischnitt I:

$$\sum F_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_x = 0$$

$$\sum M_{(\mathrm{B})} = 0 \quad A_y\, a - G_1\, b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_y = \frac{b}{a}\, G_1$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{G_1\,(1 - b/a) + G_2}{2\,\cos\alpha}$$

b) Lagerkräfte an der Rolle



Freischnitt II:

$$\sum F_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_x = -A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_y = G_1 + G_2 - A_y$$

c) Kräfte zwischen Quader und Balken

Freischnitt III:

$$\sum F_t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R = (A_y - G_2)\,\sin\alpha$$

$$\sum F_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = S + \,(A_y - G_2)\,\cos\alpha$$

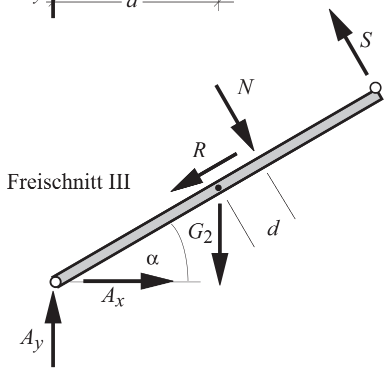
d) Kraftangriffspunkt von $\vec{N}$

Freischnitt III:

$$\sum M_{\mathrm{A}} = 0 \quad N\left(\frac{a}{\cos\alpha} + d\right) + G_2\, a - S\,\frac{2\,a}{\cos\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{a} = \left(2\,\frac{S}{N} - 1\right)\,\cos\alpha - \frac{G_2}{N}$$

e) Haftreibung: Das System kann nur im Gleichgewicht sein, falls $N = S + \,(A_y - G_2)\,\cos\alpha > 0$.[1]



Dann ergeben sich folgende beiden Fälle:

$$|R| \leq \mu\, N \;\Leftrightarrow\; |(A_y - G_2)\,\sin\alpha| \leq \mu\,\Big(S + \,(A_y - G_2)\,\cos\alpha\Big)$$

1. Fall: $(A_y - G_2)\,\sin\alpha \geq 0$ und $N = \Big(S + (A_y - G_2) > 0$

$$0 < \frac{(A_y - G_2)\,\sin\alpha}{S + \,(A_y - G_2)\,\cos\alpha} = \mu_{\mathrm{min},1} \leq \mu$$

2. Fall: $(A_y - G_2)\,\sin\alpha < 0$ und $N = \Big(S + (A_y - G_2) > 0$

$$\mu \geq \frac{-(A_y - G_2)\,\sin\alpha}{S + \,(A_y - G_2)\,\cos\alpha} = \mu_{\mathrm{min},2} > 0$$

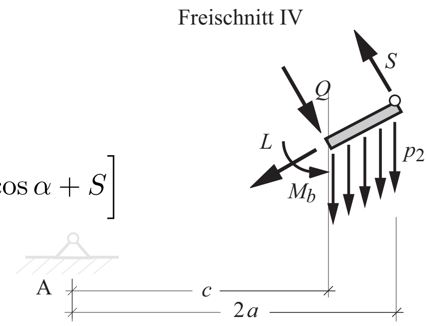
In beiden Fällen tritt keine Selbsthemmung auf, da es ein notwendiges $\mu_{\mathrm{min}} > 0$ gibt.

[1] Die Forderung $N \geq 0$ liefert:

$$G_1 \geq 2\,G_2\,\frac{a}{b}$$

Falls Dies nicht erfüllt ist, kann der Quader nicht auf den Balken drücken. Falls $b < 0$ ist diese Bedingung immer erfüllbar.

f) Schnittreaktionen



Freischnitt IV mit $p_2 = \dfrac{G_2}{(2\,a)/\cos\alpha} = G_2\,\dfrac{\cos\alpha}{2\,a}$:

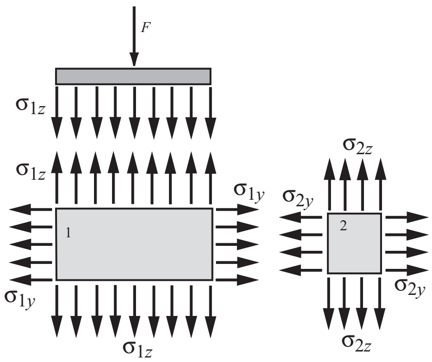
$$\sum F_t = 0 \quad L = -p_2\,\frac{2\,a-c}{\cos\alpha}\,\sin\alpha \;\left[= -G_2\,\frac{2a-c}{2a}\,\sin\alpha\right]$$

$$\sum F_t = 0 \quad Q = -p_2\,\frac{2\,a-c}{\cos\alpha}\,\cos\alpha + S \;\left[= -G_2\,\frac{2a-c}{2a}\,\cos\alpha + S\right]$$

$$\sum F_n = 0 \quad M_b = p_2\,\frac{1}{2}\left(\frac{2\,a-c}{\cos\alpha}\right)^2 \cos\alpha - S\,\frac{2\,a-c}{\cos\alpha}$$

Aufgabe F1 F12 (18 Punkte)

a)



Freischnitte der Druckplatte und der elastischen Bauteile:

actio=reactio: $\sigma_{1y} = \sigma_{2y} = \sigma_y$

Gleichgewicht: $F = -\sigma_{1z}\,a_1\,c\,, \quad \sigma_{1x} = \sigma_{2x} = 0$

Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für ebenen Spannungszustand (Hooke):

(1)	$E_1\,\epsilon_{1y} = \sigma_y - \nu\,\sigma_{1z}$	Unbek. 1 bis 3:	$\epsilon_{1y}\,,\ \sigma_{1z}\,,\ \sigma_y\,,$
(2)	$E_1\,\epsilon_{1z} = \sigma_{1z} - \nu\,\sigma_y$	Unbek. 4:	ϵ_{1z}
(3)	$E_2\,\epsilon_{2y} = \sigma_y - \nu\,\sigma_{2z}$	Unbek. 5, 6:	$\epsilon_{2y}\,,\ \sigma_{2z}$
(4)	$E_2\,\epsilon_{2z} = \sigma_{2z} - \nu\,\sigma_y$	Unbek. 7:	ϵ_{2z}

Verformungsaussagen:

(5) $\epsilon_{1z} = -\dfrac{\Delta h}{h} = \epsilon$

(6) $\epsilon_{2z} = 0$

(7) $2\,a_2\,\epsilon_{2y} + a_1\,\epsilon_{1y} = 0 \quad \Leftarrow \quad 2\Delta a_2 + \Delta a_1 = 0$

(8) $s = \dfrac{\Delta a_1}{2} = \Delta a_2$

Elimination von σ_y:

$$\begin{array}{lll}
(4),(6) \text{ in } (1) & E_1\,\epsilon_{1y} & = \dfrac{\sigma_{2z}}{\nu} - \nu\,\sigma_{1z} \\
(4),(6) \text{ in } (2) & E_1\,\epsilon & = \sigma_{1z} - \sigma_{2z} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{2,z} = \sigma_{1z} - E_1\,\epsilon \\
(4,6) \text{ in } (3) & E_2\,\epsilon_{2y} & = \sigma_{2z}\,\dfrac{1-\nu^2}{\nu} \\
 & 2\,a_2\,\epsilon_{2y} + a_1\,\epsilon_{1y} & = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
E_1\,\epsilon_{1y} & = \sigma_{1z}\dfrac{1-\nu^2}{\nu} - E_1\,\epsilon\,\dfrac{1}{\nu} \\
E_2\,\epsilon_{2y} & = \sigma_{1z}\dfrac{1-\nu^2}{\nu} - E_1\,\epsilon\,\dfrac{1-\nu^2}{\nu^2} \\
2\,a_2\,\epsilon_{2y} + a_1\,\epsilon_{1y} & = 0
\end{array}$$

$$\sigma_{1z}\,(1-\nu^2)\left(2\,\frac{a_2}{E_2} + \frac{a_1}{E_1}\right) = \epsilon\left(2\,a_2\,\frac{E_1}{E_2}\,\frac{1-\nu^2}{\nu} + a_1\right)$$

$$\sigma_{1z} = \frac{\epsilon\,E_1}{1-\nu^2}\,\frac{\left(2\,\dfrac{a_2}{a_1}\,\dfrac{E_2}{E_1}\,\dfrac{1-\nu^2}{\nu} + 1\right)}{\left(2\,\dfrac{a_2}{a_1}\,\dfrac{E_2}{E_1} + 1\right)} \quad \left(\overset{\epsilon\leq 0}{\leq} \; 0 \; \checkmark \right)$$

b) Betrachtung der x-Richtung:

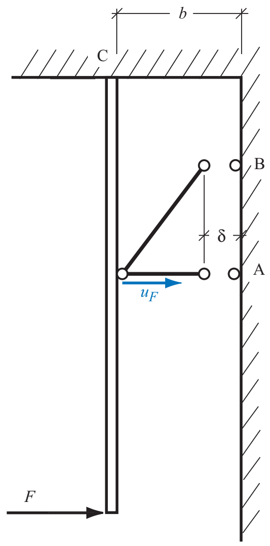
$$\left.\begin{array}{l}
\epsilon_{1x} = -\dfrac{\nu}{E_1}\,(\sigma_y + \sigma_{1z}) \quad \Rightarrow \quad \Delta c = -\,c\,\dfrac{\nu}{E_1}\,(\sigma_y + \sigma_{1z}) \\
\sigma_y = \dfrac{\sigma_{2z}}{\nu} = \dfrac{\sigma_{1z} - E_1\,\epsilon}{\nu}
\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta c = -\,c\left(\frac{\sigma_{1z}}{E_1}\,(\nu+1) - \epsilon\right)$$

c) Schubspannung aus Mohrschem Kreis mit $\sigma_{1z} < \sigma_y < \sigma_{1x} = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{1z}}{2}$$

Aufgabe F2 F12 (21 Punkte)

a) Mindestkraft $\vec{F}_{\min}$



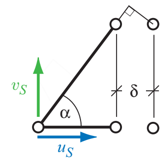
Die Verschiebung des gemeinsamen Gelenkpunktes der Stäbe am Balken gelingt am leichtesten, wenn die Kraft $\vec{F}$ senkrecht zum Balken an dessen Ende angreift. Die damit verbundene Hebelwirkung drückt sich im zweiten Summanden der nachfolgenden Formel aus.

Für die Verschiebung $\vec{u}_F$ gilt:

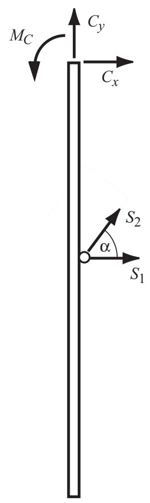
$$u_F = \frac{F\,8a^3}{3\,IE} + \frac{F\,c\,4a^2}{2\,IE} = \frac{F\,8a^3}{3\,IE}\left(1 + \frac{3c}{4a}\right)$$

Minimal nötige Verschiebung zum Zusammenbau

$$u_{F,\min} = \delta = \frac{F_{\min}\,8a^3}{3\,IE}\left(1+\frac{3c}{4a}\right) \quad \Rightarrow \quad F_{\min} = \frac{3\,IE\,\delta}{8\,a^3\left(1+\frac{3c}{4a}\right)}$$



Verschiebeplan für b)



Freischnitt für c)

b) Verformung des Balkens nur durch die Stabkräfte:

$$\vec{f}_S = (u_S, v_S) \approx (u_S, 0)$$

lt. Verschiebeplan für Stab 1: $\Delta l_1 = -u_S + \delta$

lt. Verschiebeplan für Stab 2: $\Delta l_2 = -u_S\,\cos\alpha - v_S\,\sin\alpha + \delta\,\cos\alpha$

Für u_S gilt ferner:

$$u_S = \frac{(S_1 + S_2\,\cos\alpha)\,8a^3}{3\,IE}$$

Vernachlässigung der Längsdehnung des Balkens: $v_S = 0$

Mit Hooke $\Delta l_i = \dfrac{S_i\,l_i}{EA}$ erhalten wir das Gleichungssystem:

$$(1)\quad \frac{S_1\,l_1}{EA} = -\frac{(S_1 + S_2\,\cos\alpha)\,8a^3}{3\,IE} + \delta \qquad \Rightarrow S_1\left(\frac{l_1}{EA} + \frac{8a^3}{3\,IE}\right) + S_2\left(\frac{8a^3\,\cos\alpha}{3\,IE}\right) = \delta$$

$$(2)\quad \frac{S_2\,l_2}{EA} = -\frac{(S_1 + S_2\,\cos\alpha)\,8a^3\,\cos\alpha}{3\,IE} + \delta\,\cos\alpha \Rightarrow S_1\left(\frac{8a^3\,\cos\alpha}{3\,IE}\right) + S_2\left(\frac{l_2}{EA} + \frac{8a^3\,\cos^2\alpha}{3\,IE}\right) = \delta\,\cos\alpha$$

$$l_1 = b\,,\ l_2 = b/\cos\alpha\,,\ \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

Dies sind 2 Gleichungen für die beiden Unbekannten S_1 und S_2[2].

c) lt. Freischnitt:

$$\sum M_{(\mathrm{C})} = 0 \quad M_C + (S_1 + S_2\cos\alpha)\,2a = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C = -\,(S_1 + S_2\cos\alpha)\,2a$$

$$\sum F_x = 0 \quad C_x + S_1 + S_2\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = -\,(S_1 + S_2\cos\alpha)$$

$$\sum F_y = 0 \quad C_y + S_2\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = -S_2\sin\alpha$$

[2]Kontrolle: Das Problem muss eine eindeutige Lösung mit endlichen Kräften aufweisen. Sollen die Lösungen für S_1 und S_2 endlich bleiben, müssen alle ausgeklammerten Faktoren im Gleichungssystem stets ungleich Null sein. Dies ist hier für alle denkbaren Kombinationen von a, l_i, α, EA, IE der Fall!