

Musterlösung Mechanik I WS12

Aufgabe S1 F12 (26 Punkte)

a) Auflagerreaktionen bei A und Seilkraft

Freischnitt I:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow A_x = 0 \\ \sum M_{(B)} = 0 \quad A_y a - G_1 b = 0 & \Rightarrow A_y = \frac{b}{a} G_1 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow S = \frac{G_1(1 - b/a) + G_2}{2 \cos \alpha} \end{aligned}$$

b) Lagerkräfte an der Rolle

Freischnitt II:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow B_x = -A_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow B_y = G_1 + G_2 - A_y \end{aligned}$$

c) Kräfte zwischen Quader und Balken

Freischnitt III:

$$\begin{aligned} \sum F_t = 0 & \Rightarrow R = (A_y - G_2) \sin \alpha \\ \sum F_n = 0 & \Rightarrow N = S + (A_y - G_2) \cos \alpha \end{aligned}$$

d) Kraftangriffspunkt von \vec{N}

Freischnitt III:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \quad N \left(\frac{a}{\cos \alpha} + d \right) + G_2 a - S \frac{2a}{\cos \alpha} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{a} = \left(2 \frac{S}{N} - 1 \right) \cos \alpha - \frac{G_2}{N} \end{aligned}$$

e) Haftreibung: Das System kann nur im Gleichgewicht sein, falls $N = S + (A_y - G_2) \cos \alpha > 0$.¹

Dann ergeben sich folgende beiden Fälle:

$$|R| \leq \mu N \Leftrightarrow |(A_y - G_2) \sin \alpha| \leq \mu (S + (A_y - G_2) \cos \alpha)$$

1. Fall: $(A_y - G_2) \sin \alpha \geq 0$ und $N = (S + (A_y - G_2) \cos \alpha) > 0$

$$0 < \frac{(A_y - G_2) \sin \alpha}{S + (A_y - G_2) \cos \alpha} = \mu_{\min,1} \leq \mu$$

2. Fall: $(A_y - G_2) \sin \alpha < 0$ und $N = (S + (A_y - G_2) \cos \alpha) > 0$

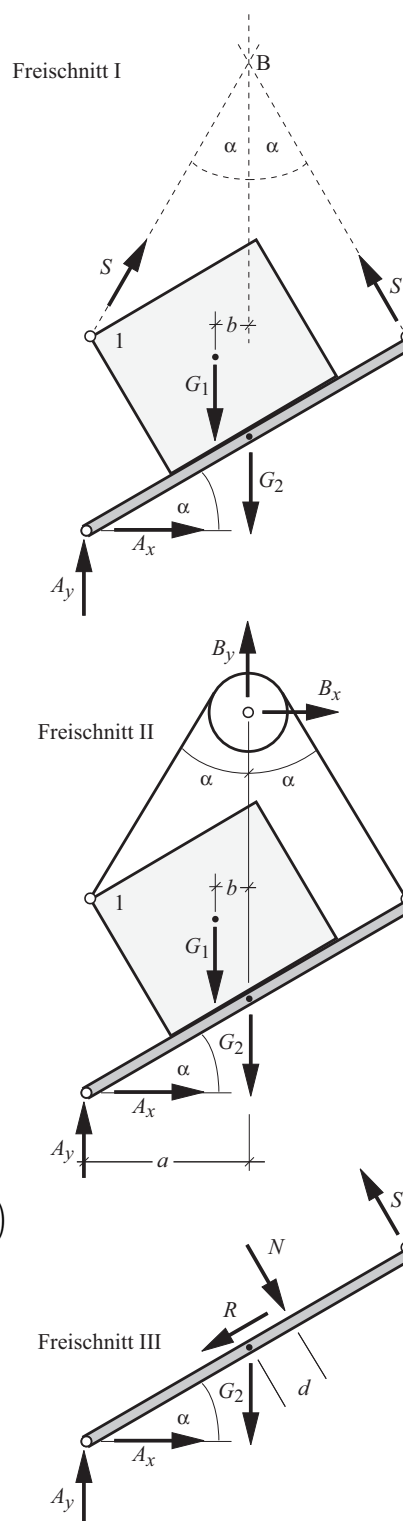
$$\mu \geq \frac{-(A_y - G_2) \sin \alpha}{S + (A_y - G_2) \cos \alpha} = \mu_{\min,2} > 0$$

In beiden Fällen tritt keine Selbsthemmung auf, da es ein notwendiges $\mu_{\min} > 0$ gibt.

¹Die Forderung $N \geq 0$ liefert:

$$G_1 \geq 2 G_2 \frac{a}{b}$$

Falls Dies nicht erfüllt ist, kann der Quader nicht auf den Balken drücken. Falls $b < 0$ ist diese Bedingung immer erfüllbar.



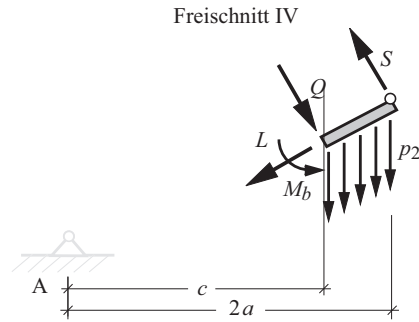
f) Schnittreaktionen

Freischnitt IV mit $p_2 = G_2 \frac{2a-c}{2a}$:

$$\sum F_t = 0 \quad L = -p_2 \frac{2a-c}{\cos \alpha} \sin \alpha$$

$$\sum F_t = 0 \quad Q = -p_2 \frac{2a-c}{\cos \alpha} \cos \alpha + S$$

$$\sum F_n = 0 \quad M_b = \frac{p_2}{2} \left(\frac{2a-c}{\cos \alpha} \right)^2 \cos \alpha - S \frac{2a-c}{\cos \alpha}$$



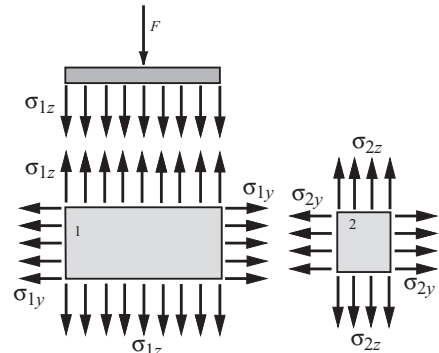
Aufgabe F1 F12 (18 Punkte)

a)

Freischnitte der Druckplatte und der elastischen Bauteile:

$$\text{actio=reactio: } \sigma_{1y} = \sigma_{2y} = \sigma_y$$

$$\text{Gleichgewicht: } F = -\sigma_{1z} a_1 c, \quad \sigma_{1x} = \sigma_{2x} = 0$$



Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für ebenen Spannungszustand (Hooke):

$$(1) \quad E_1 \epsilon_{1y} = \sigma_y - \nu \sigma_{1z} \quad \text{Unbek. 1 bis 3: } \epsilon_{1y}, \sigma_{1z}, \sigma_y,$$

$$(2) \quad E_1 \epsilon_{1z} = \sigma_{1z} - \nu \sigma_y \quad \text{Unbek. 4: } \epsilon_{1z}$$

$$(3) \quad E_2 \epsilon_{2y} = \sigma_y - \nu \sigma_{2z} \quad \text{Unbek. 5, 6: } \epsilon_{2y}, \sigma_{2z}$$

$$(4) \quad E_2 \epsilon_{2z} = \sigma_{2z} - \nu \sigma_y \quad \text{Unbek. 7: } \epsilon_{2z}$$

Verformungsaussagen:

$$(5) \quad \epsilon_{1z} = -\frac{\Delta h}{h} = \epsilon$$

$$(6) \quad \epsilon_{2z} = 0$$

$$(7) \quad 2a_2 \epsilon_{2y} + a_1 \epsilon_{1y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\Delta a_2 + \Delta a_1 = 0$$

$$(8) \quad s = \frac{\Delta a_1}{2} = \Delta a_2$$

Elimination von σ_y :

$$\begin{aligned}
 (4), (6) \text{ in } (1) \quad E_1 \epsilon_{1y} &= \frac{\sigma_{2z}}{\nu} - \nu \sigma_{1z} \\
 (4), (6) \text{ in } (2) \quad E_1 \epsilon &= \sigma_{1z} - \sigma_{2z} \Rightarrow \sigma_{2,z} = \sigma_{1z} - E_1 \epsilon \\
 (4, 6) \text{ in } (3) \quad E_2 \epsilon_{2y} &= \sigma_{2z} \frac{1 - \nu^2}{\nu} \\
 2 a_2 \epsilon_{2y} + a_1 \epsilon_{1y} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_1 \epsilon_{1y} &= \sigma_{1z} \frac{1 - \nu^2}{\nu} - E_1 \epsilon \frac{1}{\nu} \\
 E_2 \epsilon_{2y} &= \sigma_{1z} \frac{1 - \nu^2}{\nu} - E_1 \epsilon \frac{1 - \nu^2}{\nu^2} \\
 2 a_2 \epsilon_{2y} + a_1 \epsilon_{1y} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{1z} (1 - \nu^2) \left(2 \frac{a_2}{E_2} + \frac{a_1}{E_1} \right) = \epsilon \left(2 a_2 \frac{E_1}{E_2} \frac{1 - \nu^2}{\nu} + a_1 \right)$$

$$\sigma_{1z} = \frac{\epsilon E_1}{1 - \nu^2} \frac{\left(2 \frac{a_2}{a_1} \frac{E_2}{E_1} \frac{1 - \nu^2}{\nu} + 1 \right)}{\left(2 \frac{a_2}{a_1} \frac{E_2}{E_1} + 1 \right)} \quad (\epsilon \stackrel{\leq 0}{\leq} 0 \sqrt{ })$$

b) Betrachtung der x -Richtung:

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_{1x} &= -\frac{\nu}{E_1} (\sigma_y + \sigma_{1z}) \Rightarrow \Delta c = -c \frac{\nu}{E_1} (\sigma_y + \sigma_{1z}) \\
 \sigma_y &= \frac{\sigma_{2z}}{\nu} = \frac{\sigma_{1z} - E_1 \epsilon}{\nu}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta c = -c \left(\frac{\sigma_{1z}}{E_1} (\nu + 1) - \epsilon \right)$$

c) Schubspannung aus Mohrschem Kreis mit $\sigma_{1z} < \sigma_y < \sigma_{1x} = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{1z}}{2}$$

Aufgabe F2 F12 (21 Punkte)

a) Mindestkraft \vec{F}_{\min}

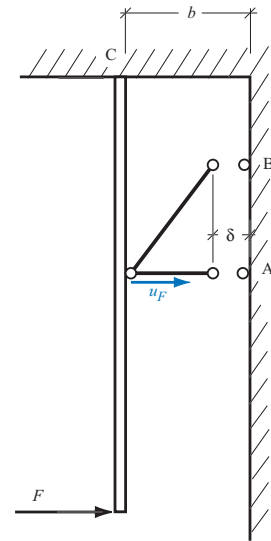
Die Verschiebung des gemeinsamen Gelenkpunktes der Stäbe am Balken gelingt am leichtesten, wenn die Kraft \vec{F} senkrecht zum Balken an dessen Ende angreift. Die damit verbundene Hebelwirkung drückt sich im zweiten Summanden der nachfolgenden Formel aus.

Für die Verschiebung \vec{u}_F gilt:

$$u_F = \frac{F 8a^3}{3IE} + \frac{F c 4a^2}{2IE} = \frac{F 8a^3}{3IE} \left(1 + \frac{3c}{4a}\right)$$

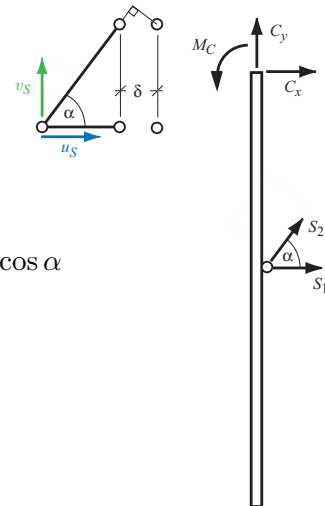
Minimal nötige Verschiebung zum Zusammenbau

$$u_{F,\min} = \delta = \frac{F_{\min} 8a^3}{3IE} \left(1 + \frac{3c}{4a}\right) \Rightarrow F_{\min} = \frac{3IE \delta}{8a^3 \left(1 + \frac{3c}{4a}\right)}$$



Verschiebeplan für b)

Freischnitt für c)



b) Verformung des Balkens nur durch die Stabkräfte:

$$\vec{f}_S = (u_S, v_S) \approx (u_S, 0)$$

lt. Verschiebeplan für Stab 1: $\Delta l_1 = -u_S + \delta$

lt. Verschiebeplan für Stab 2: $\Delta l_2 = -u_S \cos \alpha - v_S \sin \alpha + \delta \cos \alpha$

Für u_S gilt ferner:

$$u_S = \frac{(S_1 + S_2 \cos \alpha) 8a^3}{3IE}$$

Vernachlässigung der Längsdehnung des Balkens: $v_S = 0$

Mit Hooke $\Delta l_i = \frac{S_i l_i}{EA}$ erhalten wir das Gleichungssystem:

$$(1) \frac{S_1 l_1}{EA} = -\frac{(S_1 + S_2 \cos \alpha) 8a^3}{3IE} + \delta \Rightarrow S_1 \left(\frac{l_1}{EA} + \frac{8a^3}{3IE}\right) + S_2 \left(\frac{8a^3 \cos \alpha}{3IE}\right) = \delta$$

$$(2) \frac{S_2 l_2}{EA} = -\frac{(S_1 + S_2 \cos \alpha) 8a^3 \cos \alpha}{3IE} + \delta \cos \alpha \Rightarrow S_1 \left(\frac{8a^3 \cos \alpha}{3IE}\right) + S_2 \left(\frac{l_2}{EA} + \frac{8a^3 \cos^2 \alpha}{3IE}\right) = \delta \cos \alpha$$

$$l_1 = b, \quad l_2 = b / \cos \alpha, \quad \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Dies sind 2 Gleichungen für die beiden Unbekannten S_1 und S_2^2 .

c) lt. Freischnitt:

$$\sum M_{(C)} = 0 \quad M_C + (S_1 + S_2 \cos \alpha) 2a = 0 \Rightarrow M_C = -(S_1 + S_2 \cos \alpha) 2a$$

$$\sum F_x = 0 \quad C_x + S_1 + S_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow C_x = -(S_1 + S_2 \cos \alpha)$$

$$\sum F_y = 0 \quad C_y + S_2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow C_y = -S_2 \sin \alpha$$

²Kontrolle: Das Problem muss eine eindeutige Lösung mit endlichen Kräften aufweisen. Sollen die Lösungen für S_1 und S_2 endlich bleiben, müssen alle ausgeklammerten Faktoren im Gleichungssystem stets ungleich Null sein. Dies ist hier für alle denkbaren Kombinationen von a, l_i, α, EA, IE der Fall!