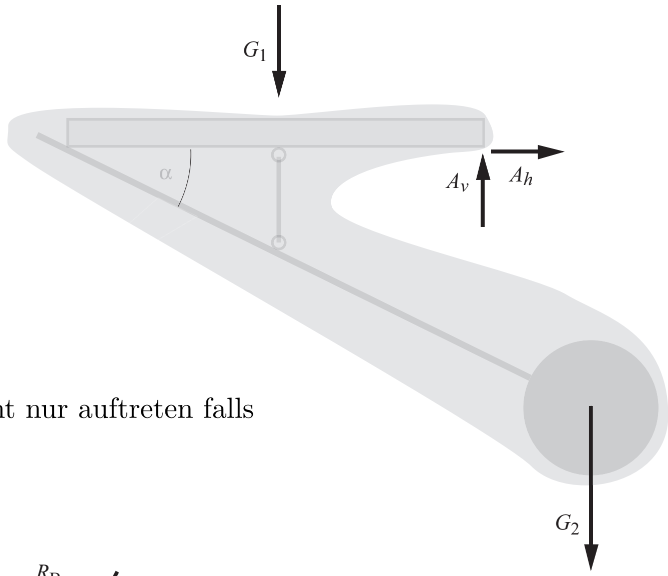
Musterlösung Mechanik I WS13

Aufgabe S1 F13 (21 Punkte)

a)



Freischnitt Gesamtsystem:

$$\sum M_{(A)} = 0: \quad G_1\, a - G_2\,(b\,\cos\alpha - a) \;=\; 0$$

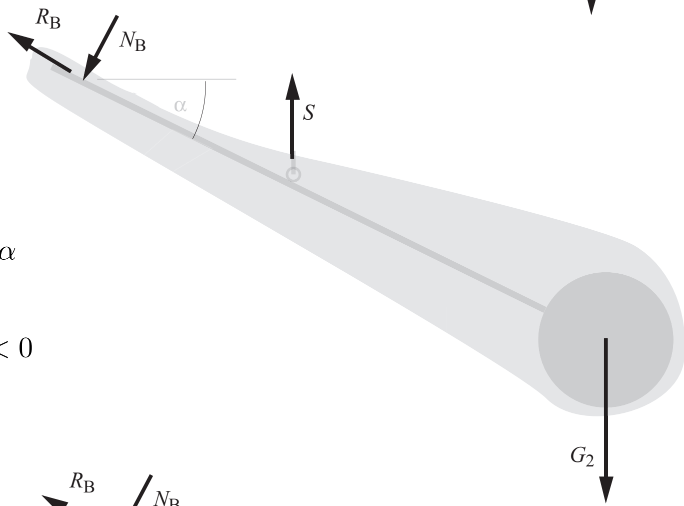
$$\Rightarrow \qquad G_2(b) = \frac{G_1}{\dfrac{b\,\cos\alpha}{a} - 1}$$

Da $G_2(b) > 0$ gelten muss, kann Gleichgewicht nur auftreten falls

$$\frac{b\,\cos\alpha}{a} > 1 \qquad \Rightarrow \quad b > b_{\min} = \frac{a}{\cos\alpha}$$

Ferner gilt: $\lim\limits_{b\to b_{\min}} G_2(b) = \infty$

b) Notwendiger Haftreibungskoeffizient μ_{erf}:



Freischnitt Teilsystem:

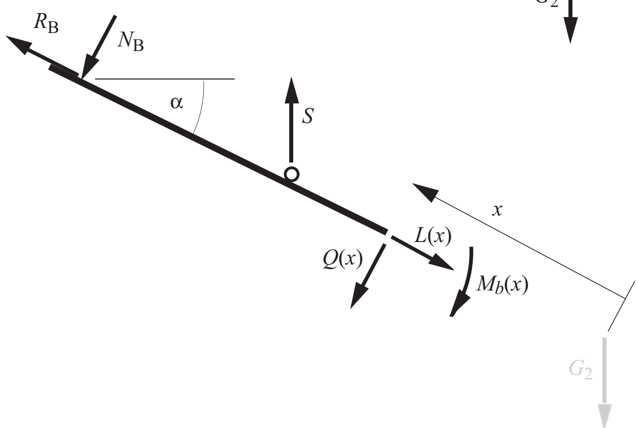
$$\sum F_{\text{tang}} = 0: \quad \Rightarrow \quad R_B = (-S + G_2)\,\sin\alpha$$
$$\sum F_{\text{norm}} = 0: \quad \Rightarrow \quad N_B = (S - G_2)\,\cos\alpha$$
$$\sum M_{(B)} = 0: \quad \Rightarrow \quad S > G_2 \quad \Rightarrow \quad R_B < 0$$

Bedingung für Haftreibung: $\quad |R_B| \leq \mu\, N_B$

$$-R_B = -\,(-S + G_2)\,\sin\alpha \leq \mu\,(S - G_2)\,\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \mu \geq \tan\alpha = \mu_{\text{erf}}$$

c) Schnittreaktionen für $0 \leq x \leq b$:



Längskraft: $L(x) = G_2\,\sin\alpha = const$

Querkraft: $Q(x) = G_2\,\cos\alpha = const$

Biegemoment: $M_b(x) = G_2\,\cos\alpha\; x$

Maximalwerte:

Das Biegemoment wächst linear mit x bis $x = b$, und fällt dann für $x > b$ wegen der Seilkraft wieder auf den Wert Null bei B ab: $\quad \Rightarrow \; M_{b,\max} = G_2\, b\,\cos\alpha$

Die Querkraft ist konstant bis $x = b$ und springt dann für $x > b$ auf den Wert $Q = (G_2 - S)\,\cos\alpha$. Für S gilt: $S = G_2\,\frac{b\,\cos\alpha}{a}$, so dass $Q(x > b) = G_2\,\cos\alpha\,\left(1 - \frac{b}{b_{\min}}\right)$, welches betragsmäßig kleiner als $Q(x < b)$ ist, solange $b < 2\,b_{\min}$ bleibt.

Ähnliches gilt für L.

Aufgabe F1 F13 (15 Punkte)

a) Für die Dehnungen von Fasern und Matrix gilt mit dem Hookeschen Gesetz wegen $\sigma_y = \sigma_z = 0$:

$$\begin{aligned}\epsilon_{x,\mathrm{F}} &= \frac{\sigma_{x,\mathrm{F}}}{E_\mathrm{F}} + \alpha_\mathrm{F}\,\Delta T &= 0\\ \epsilon_{x,\mathrm{M}} &= \frac{\sigma_{x,\mathrm{M}}}{E_\mathrm{M}} + \alpha_\mathrm{M}\,\Delta T &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma_{x,\mathrm{F}}}{\sigma_{x,\mathrm{M}}} = \frac{\alpha_\mathrm{F}\,E_\mathrm{F}}{\alpha_\mathrm{M}\,E_\mathrm{M}}$$

b) Für die resultierende Druckkraft auf die Wände gilt (Richtungssinn von $\vec{F}$ als Zugkraft angenommen):

$$\frac{F}{\Delta T} = \frac{\sigma_{x,\mathrm{F}}\,A_\mathrm{F} + \sigma_{x,\mathrm{M}}\,(A - A_\mathrm{F})}{\Delta T} = \frac{\sigma_{x,\mathrm{F}}\,A}{\Delta T}\left(\frac{A_\mathrm{F}}{A} + \frac{\sigma_{x,\mathrm{M}}}{\sigma_{x,\mathrm{F}}}\,(1 - \frac{A_\mathrm{F}}{A})\right) = -\alpha_\mathrm{F}\,E_\mathrm{F}\,A\left(\frac{A_\mathrm{F}}{A} + \frac{\sigma_{x,\mathrm{M}}}{\sigma_{x,\mathrm{F}}}\,(1 - \frac{A_\mathrm{F}}{A})\right)$$

c) Es gilt: $\quad \dfrac{\Delta A}{A} = \epsilon_y + \epsilon_z = 2\,\epsilon_y = 2\,(-\nu\sigma_x = \alpha\Delta T)$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta A_\mathrm{F}}{A_\mathrm{F}} &= 2\,\epsilon_{y,\mathrm{F}} = 2\,\left(-\nu_\mathrm{F}\,\tfrac{\sigma_{x,\mathrm{F}}}{E_\mathrm{F}} + \alpha_\mathrm{F}\Delta T\right)\\ \frac{\Delta A_\mathrm{M}}{A_\mathrm{M}} &= 2\,\epsilon_{y,\mathrm{M}} = 2\,\left(-\nu_\mathrm{M}\,\tfrac{\sigma_{x,\mathrm{M}}}{E_\mathrm{M}} + \alpha_\mathrm{M}\Delta T\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta A_\mathrm{F} + \Delta A_\mathrm{M}}{A} &= \frac{\Delta A_\mathrm{F}}{A_\mathrm{F}}\,\frac{A_\mathrm{F}}{A} + \frac{\Delta A_\mathrm{M}}{A_\mathrm{M}}\,\frac{A - A_\mathrm{F}}{A}\\ &= 2\,\left((-\nu_\mathrm{F}\,\frac{\sigma_{x,\mathrm{F}}}{E_\mathrm{F}} + \alpha_\mathrm{F}\Delta T)\,\frac{A_\mathrm{F}}{A} + (-\nu_\mathrm{M}\,\frac{\sigma_{x,\mathrm{M}}}{E_\mathrm{M}} + \alpha_\mathrm{M}\Delta T)\,\frac{A - A_\mathrm{F}}{A}\right)\\ &= 2\,\Delta T\,\left((\nu_\mathrm{F}\,\alpha_\mathrm{F} + \alpha_\mathrm{F})\,\frac{A_\mathrm{F}}{A} + (\nu_\mathrm{M}\,\alpha_\mathrm{M} + \alpha_\mathrm{M})\,\frac{A - A_\mathrm{F}}{A}\right)\\ \frac{\Delta A}{\Delta T} &= 2\,A\,\left(\alpha_\mathrm{F}\,(\nu_\mathrm{F} + 1)\,\frac{A_\mathrm{F}}{A} + \alpha_\mathrm{M}\,(\nu_\mathrm{M} + 1)\,\frac{A - A_\mathrm{F}}{A}\right)\end{aligned}$$

d) Aus Druckversuchen:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{F,\,zul}} &= E_\mathrm{F}\,\epsilon_\mathrm{F}\\ \sigma_{\mathrm{M,\,zul}} &= E_\mathrm{M}\,\epsilon_\mathrm{M}\end{aligned}$$

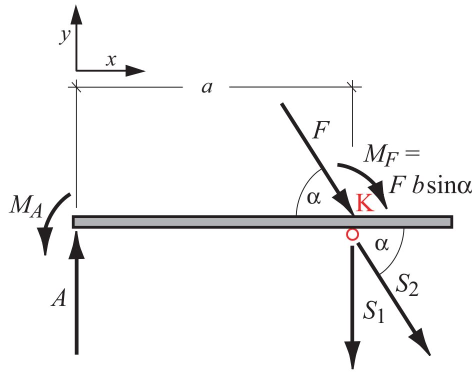
$$\epsilon_\mathrm{F} = \epsilon_\mathrm{M} \Rightarrow \frac{\sigma_{\mathrm{F,\,zul}}}{\sigma_{\mathrm{M,\,zul}}} = \frac{E_\mathrm{F}}{E_\mathrm{M}}$$

$$\text{wegen a)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_\mathrm{F}}{\alpha_\mathrm{M}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{\mathrm{F,\,zul}}}{\sigma_{\mathrm{M,\,zul}}} = \frac{\sigma_{x,\mathrm{F}}}{\sigma_{x,\mathrm{M}}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T_{\max} = -\frac{\sigma_{x,\mathrm{F}}}{E_\mathrm{F}\,\alpha_\mathrm{F}} = \frac{\sigma_{\mathrm{F,zul}}}{E_\mathrm{F}\,\alpha_\mathrm{F}} \equiv \frac{\sigma_{\mathrm{M,zul}}}{E_\mathrm{M}\,\alpha_\mathrm{M}}$$

Aufgabe F2 F13 (17 Punkte)

a) Freischnitt Gesamtsystem:



		Unbek.	$\sum$
(1) $\sum M_{(\mathrm{K})} = 0:$	$M_{\mathrm{A}} - A\,a - F\,b\,\sin\alpha = 0$	$M_{\mathrm{A}},\ A$	2
(2) $\sum F_y = 0:$	$A - S_1 - (F + S_2)\,\sin\alpha = 0$	$S_1\,,\ S_2$	4
(3) $\sum F_x = 0:$	$F\,\cos\alpha + S_2\,\cos\alpha = 0$	S_2	

Aus (3) folgt unmittelbar: $S_2 \;=\; -F$

b) Mit dem Hookeschen Gesetz $\Delta l_i = \dfrac{S_i\,l_i}{EA}$ folgt mit $S_2 = -F$:

$$\Delta l_2 \;=\; \frac{S_2\,l_2}{EA} \;=\; -\frac{F\,l_2}{EA} \quad (<0 \text{ falls } F\;>\;0) \quad [\,l_2 = \frac{h}{\sin\alpha}\,]$$

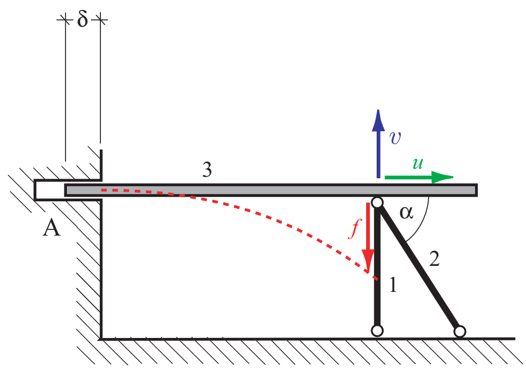
c) Falls $F = F_\delta$ soll $u = \delta$ sein. Dann sind $S_1 = S_{1\delta}$ und $S_2 = S_{2\delta}$!

Die nicht gesuchten Unbekannten A und M_{A} werden durch Gleichung (1) und (2) bestimmt, Gleichung (3) liefert wieder: $\quad S_2 = S_{2\delta} = -F_\delta$.

Es müssen weitere Gleichungen aufgestellt werden, um F_δ zu bestimmen. Diese ergeben sich aus dem Verschiebungsplan, der die Kopplung der Längenänderung der Stäbe untereinander und die Balkenbiegung miteinander verknüpft.

Verschiebungsplan

				Unbek.	$\sum$
(1′)	Δl_1	$=$	$+\,v$	$\Delta l_1\,,\ v$	2
(2′)	Δl_2	$=$	$+\,v\,\sin\alpha - u\,\cos\alpha$	$\Delta l_2\,,\ u$	4
(3′)	u	$\overset{!}{=}$	$+\,\delta$		



$$\Rightarrow \quad \Delta l_2 = \Delta l_1\,\sin\alpha\;-\;\delta\,\cos\alpha$$

Mit Hooke und $S_2 = -F_\delta$:

$$\text{(I)} \quad -\,F_\delta\,l_2 = S_1\,l_1\,\sin\alpha\;-\;\delta\,EA\,\cos\alpha$$

Balkenbiegung:

$$\Rightarrow \quad v\;\equiv\;-f\;=\;-\left(\frac{(S_1 + (F_\delta + S_2)\,\sin\alpha)\;a^3}{3IE} + \frac{M_F\,a^2}{2IE}\right)$$

Mit (1'), Hooke und wegen $S_2 = S_{2\delta} = -F_\delta$ sowie $M_F = M_{F_\delta} = F_\delta\,b\,\sin\alpha$:

$$\text{(II)} \quad \frac{S_1\,l_1}{EA} \;=\; -\frac{S_1\,a^3}{3IE} - \frac{F_\delta\,b\,a^2\,\sin\alpha}{2IE}$$

Aus (I) und (II) folgt der skalare Wert S_1 und zwar richtigerweise $S_1 < 0$, falls $F_\delta > 0$.

Die Gl. (1) und (2) bestimmen damit eindeutig die Werte von M_A und A.