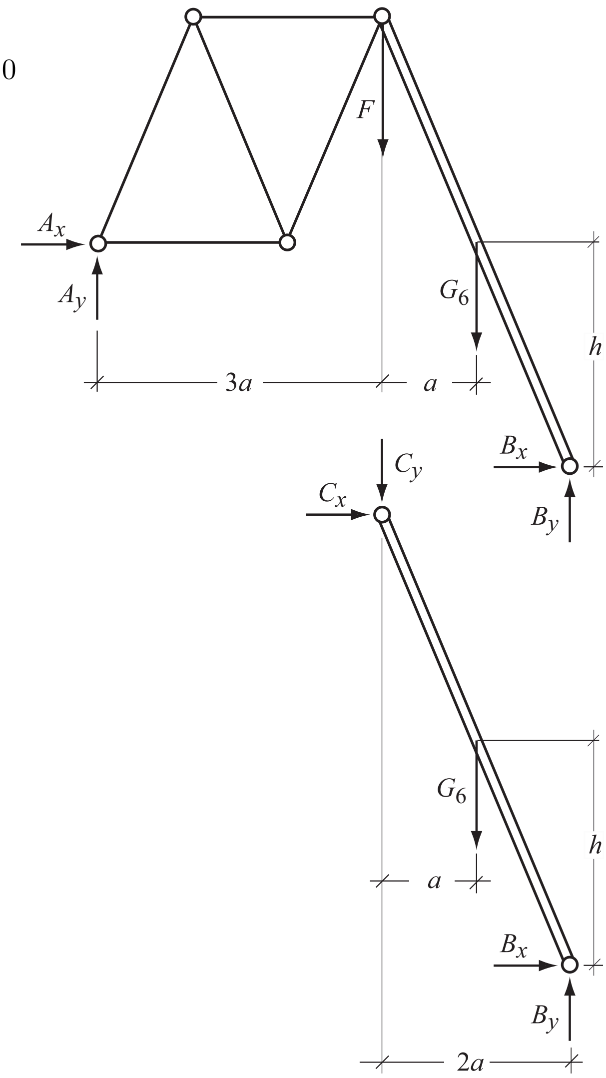
Musterlösung WS16

Aufgabe 1 WS16   24 Punkte

a) Auflagerreaktionen[1]

(i) Momentenbilanz am Gesamtsystem



(1) $\sum M_{(\mathrm{A})} = 0: \quad -F\,3a - G_6\,4a + B_y\,5a + B_x\,h = 0$

(ii) Momentenbilanz am Balken

(2) $\sum M_{(\mathrm{C})} = 0: \quad -G_6\,a + B_y\,2a + B_x\,2h = 0$

$$\left[\Rightarrow \quad B_y \quad = \quad \frac{7}{8}\,G_6 + \frac{3}{4}\,F \quad\right]$$

$$\left[\Rightarrow \quad B_x \quad = \quad -\frac{3}{4}\frac{a}{h}\,(\frac{1}{2}\,G_6 + F) \quad\right]$$

(iii) Kräftebilanz am Gesamtsystem

(3) $\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + B_x \quad = \quad 0$

(4) $\sum F_{iy} = 0: \quad A_y + B_y \quad = \quad F + G_6$

$$\left[\Rightarrow \quad A_x \quad = \quad \frac{3}{4}\frac{a}{h}\left(\frac{1}{2}\,G_6 + F\right) \quad\right]$$

$$\left[\Rightarrow \quad A_y \quad = \quad \frac{1}{8}\,G_6 + \frac{1}{4}\,F \quad\right]$$

b) Gelenkkraft C

(iv) Kräftegleichgewicht am Balken

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad C_x + B_x \quad = \quad 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad C_y + B_y - G_6 \quad = \quad 0$$

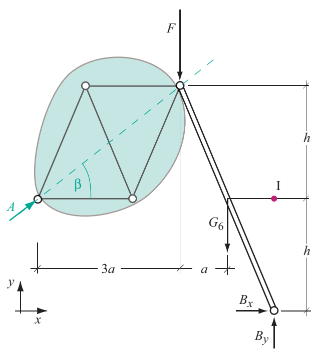
$$\left[\Rightarrow \quad C_x \quad = \quad \frac{3}{4}\frac{a}{h}\left(\frac{1}{2}\,G_6 + F\right) \quad\right]$$

$$\left[\Rightarrow \quad C_y \quad = \quad \frac{1}{8}\,G_6 - \frac{3}{4}\,F \quad\right]$$

---

[1] Alternative Lösung für die Auflagerkräfte:

Da das Fachwerk aus den Stäben eine Pendelstütze darstellt, ist die Wirkungslinie und damit die Richtung (nicht der Richtungssinn) der Kraft bei A festgelegt. Die Kräfte an den Gelenken A und von der Pendelstütze auf das Gelenk C müssen nämlich auf einer gemeinsamen Wirkungslinie liegen. Man hat dann am Gesamtsystem nur die drei Unbekannten A, B_x und B_y zu bestimmen, wobei wegen der im nebenstehenden Lageplan für $\vec{A}$ getroffenen Annahme $A_x = A\,\cos\beta\,,\ A_y = A\,\sin\beta$ mit $\beta = \arctan\left(\frac{h}{3a}\right)$ gilt.



Es reichen also die drei zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem zur Berechnung der Auflagerkräfte. Zum Beispiel die Folgenden:

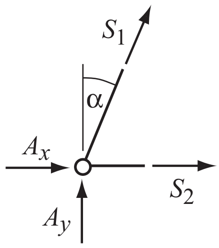
(1′) $\sum M_{(\mathrm{B})} = 0: \quad A\cos\beta\,h + A\sin\beta\,5a - F\,2a - G_6\,a = 0 \quad \Rightarrow A$

(2′) $\sum M_{(\mathrm{I})} = 0: \quad B_x\,h - A\sin\beta\,5a - F\,2a - G_6\,a = 0 \quad \Rightarrow B_x$

(3′) $\sum F_y = 0: \quad B_y + A\sin\beta - F - G_6 = 0 \quad \Rightarrow B_y$

c) Stabkräfte in den Stäben 1,2,3

(v) Freischnitt um Lager A, Kräftegleichgewichte



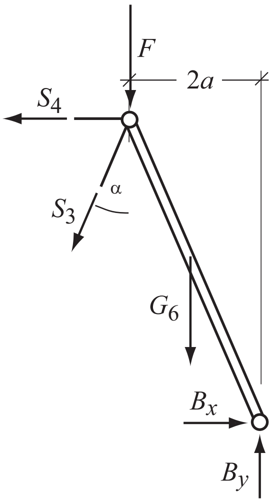
$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + S_1 \sin\alpha + S_2 = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y + S_1 \cos\alpha = 0$$

$$\left[\Rightarrow \quad S_1 = -\frac{A_y}{\cos\alpha} = -\frac{1}{4\cos\alpha}\left(\frac{1}{2}G_6 + F\right) \quad\right]$$

$$\left[\Rightarrow \quad S_2 = -A_x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}A_y = \left(-\frac{3}{4}\frac{a}{h} + \frac{\sin\alpha}{4\cos\alpha}\right)\left(\frac{G_6}{2} + F\right) \quad\right]$$

(vi) Freischnitt Balken durch Stab 3 und oberen Stab

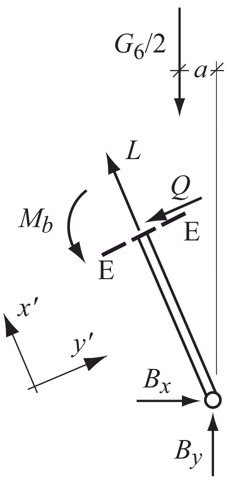


Kräftegleichgewicht

$$\sum F_{iy} = 0: \quad B_y - G_6 - F - S_3 \cos\alpha = 0$$

$$\left[\Rightarrow \quad S_3 = -\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{G_6}{8} + \frac{F}{4}\right) = S_1! \quad\right]$$

d) Schnittreaktionen



Gleichgewicht

$$\sum F_{ix'} = 0: \quad -L + B_x \sin\alpha - B_y \cos\alpha + \frac{G_6}{2}\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_{iy'} = 0: \quad -Q + B_x \cos\alpha + B_y \sin\alpha - \frac{G_6}{2}\sin\alpha = 0$$

$$\sum M_{b(E)} = 0: \quad M_b + B_x\, h + B_y\, a - \frac{G_6}{2}\frac{a}{2} = 0$$

$$\left[\Rightarrow \quad L = B_x \sin\alpha + \left(\frac{G_6}{2} - B_y\right)\cos\alpha \quad\right]$$

$$\left[\Rightarrow \quad Q = B_x \cos\alpha + \left(B_y - \frac{G_6}{2}\right)\sin\alpha \quad\right]$$

$$\left[\Rightarrow \quad M_b = \frac{1}{4}a\,(G_6 - 4\,B_y) - B_x\, h \quad\right]$$

Ergänzung zu Stabkräften

Geometrie: $\dfrac{a}{h} = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\left[\Rightarrow \quad S_2 = \left(\frac{G_6}{2} + F\right)\left(-\frac{3}{4}\frac{a}{h} + \frac{1}{4}\frac{a}{h}\right) = -\left(\frac{G_6}{2} + F\right)\frac{a}{2\,h} \quad\right]$$

Aufgabe 2 21 Punkte

a) Nebenbedingungen:

$$(1),(2) \quad \sigma_{x,1} = \sigma_{x,2} = \sigma_x = -p_s$$

$$(3),(4) \quad \sigma_{y,1} = \sigma_{y,2} = 0$$

$$(5) \quad \sigma_{z,1} = -p_o$$

$$(6) \quad \sigma_{z,2} = 0$$

$$(7) \quad \varepsilon_{x,1} = \frac{1}{E_1}\,(\sigma_x - \nu_1\,\sigma_{z,1})$$

$$(8) \quad \varepsilon_{y,1} = \frac{1}{E_1}\Big(-\nu_1\,(\sigma_{z,1} + \sigma_x)\Big)$$

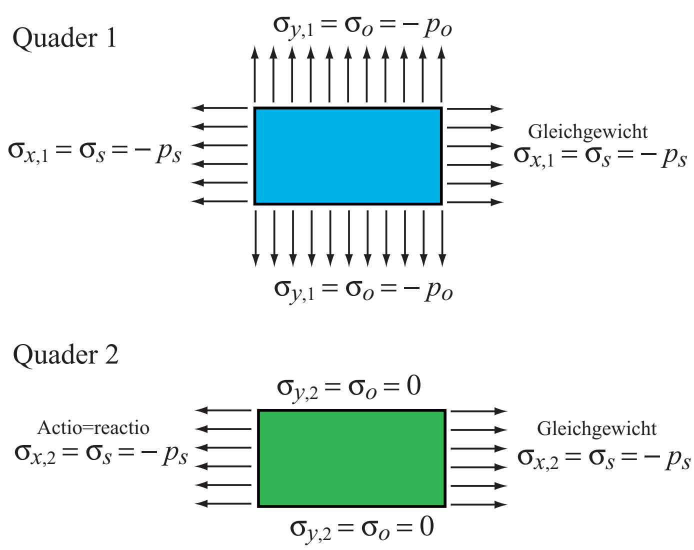
$$(9) \quad \varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1}\,(\sigma_{z,1} - \nu_1\,\sigma_x)$$

$$(10) \quad \varepsilon_{x,2} = \frac{1}{E_2}\,(\sigma_x)$$

$$(11) \quad \varepsilon_{y,2} = \frac{1}{E_2}\,(-\nu_2\,\sigma_x)$$

$$(12) \quad \varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2}\,(-\nu_2\,\sigma_x)$$

Freischnitte (Ansicht auf x,z-Ebene)



Forderungen[2]:

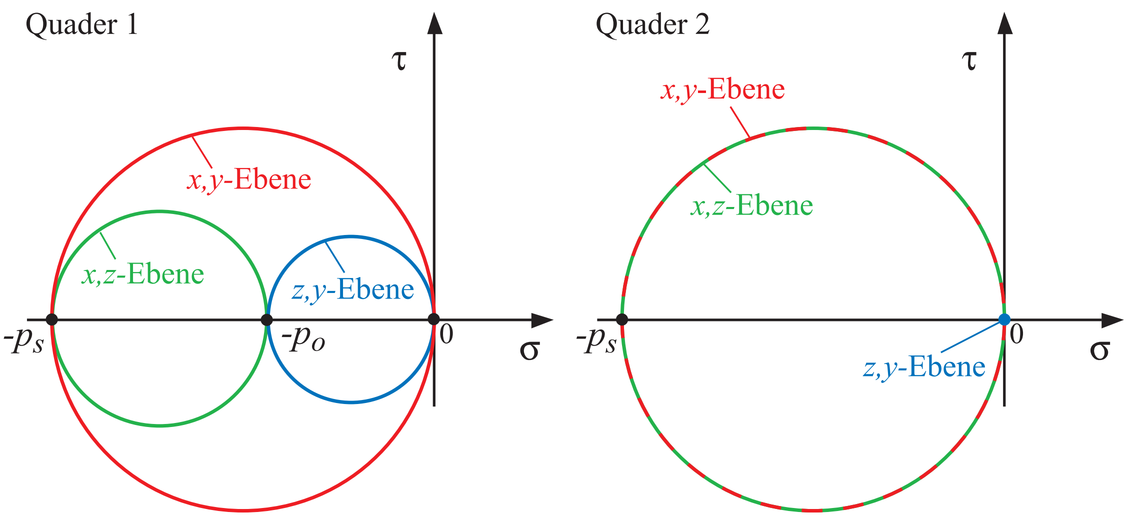
$$\Delta l = l_0\,(\varepsilon_{y,1} - \varepsilon_{y,2}) \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\nu_1}{E_1}\,(p_o + p_s) - \frac{\nu_2}{E_2}\,p_s \overset{!}{=} 0$$

$$\Delta h = h_0\,(\varepsilon_{z,1} - \varepsilon_{z,2}) \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{E_1}\,(-p_o + \nu_1\,p_s) - \frac{\nu_2}{E_2}\,p_s \overset{!}{=} 0$$

b) $$\Delta a + \Delta b = a\,\varepsilon_{x,2} + b\,\varepsilon_{x,2} = a\,\frac{1}{E_1}\,(\sigma_x - \nu_1\,\sigma_{z,1}) + b\,\frac{1}{E_2}\,(\sigma_x)\ \Big[= a\,\frac{1}{E_1}\,(-p_s + \nu_1\,p_o) + b\,\frac{1}{E_2}\,(-p_s)\Big]$$

$$\Big[\quad \Rightarrow \quad \Delta a + \Delta b = p_o\,\nu_1\,\frac{a}{E_1} - p_s\,\frac{b}{E_2} - p_s\left(\frac{a}{E_1} + \frac{b}{E_2}\right)\Big]$$

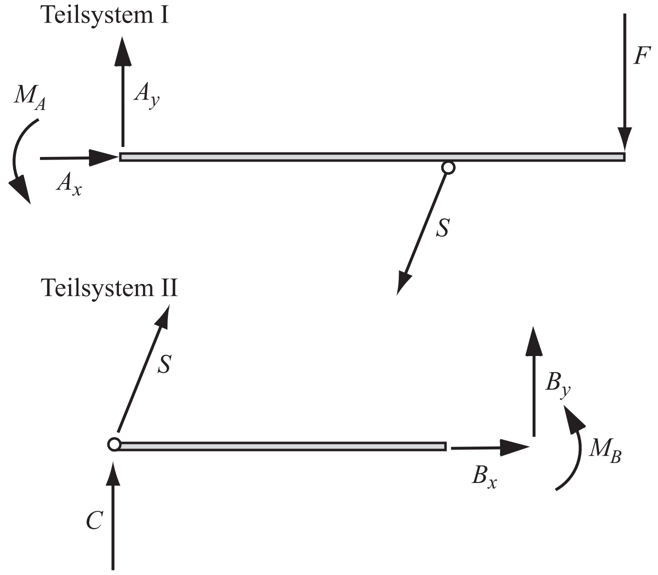
c)



[2]Die Subtraktion der nachstehenden Gleichungen liefert als einzige Lösung $\nu_1 = -1$, falls $p_s \neq 0$. Diese Bedingung ist mit gewöhnlichen Stoffen nicht einzuhalten, für die $0 < \nu < 0,5$ ist.

Aufgabe 3 28 Punkte

a) Gleichgewicht an den Freischnitten:



(1) $\sum F_{x,\mathrm{I}} = 0: \quad A_x - S\cos\alpha = 0$

(2) $\sum F_{y,\mathrm{I}} = 0: \quad A_y - F - S\sin\alpha = 0$

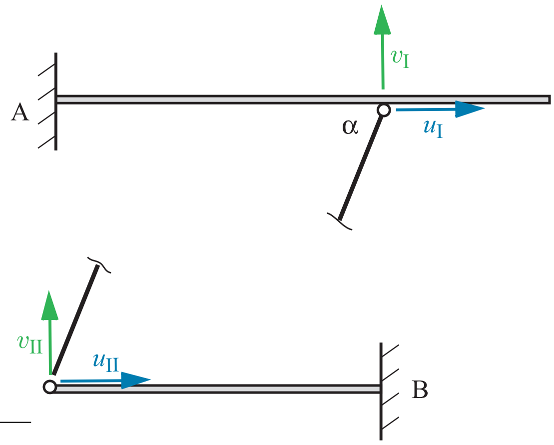
(3) $\sum M_{(\mathrm{A}),\mathrm{I}} = 0: \quad M_A - F\,(a+b) - S\,a\sin\alpha = 0$

(4) $\sum F_{x,\mathrm{II}} = 0: \quad B_x + S\cos\alpha = 0$

(5) $\sum F_{y,\mathrm{II}} = 0: \quad B_y + S\sin\alpha + C = 0$

(6) $\sum M_{(\mathrm{B}),\mathrm{II}} = 0: \quad M_B - (S\sin\alpha + C)\,a = 0$

b) Verschiebepläne:



($b1$) $\quad \Delta c = u_{\mathrm{I}}\cos\alpha - u_{\mathrm{II}}\cos\alpha + v_{\mathrm{I}}\sin\alpha - v_{\mathrm{II}}\sin\alpha$

($b2$) $\quad u_{\mathrm{I}} \approx 0$

($b3$) $\quad u_{\mathrm{II}} \approx 0$

($b4$) $\quad v_{\mathrm{I}} = -\dfrac{(F + S\sin\alpha)\,a^3}{3\,IE} - \dfrac{F\,b\,a^2}{2\,IE}$

($b5$) $\quad v_{\mathrm{II}} = -\delta$

($b6$) $\quad v_{\mathrm{II}} = +\dfrac{(C + S\sin\alpha)\,a^3}{3\,IE}$

($b7$) $\quad \Delta c = \dfrac{S\,c}{EA}$

$$\left[\Rightarrow \quad (7) \quad \delta = -\frac{(C + S\sin\alpha)\,a^3}{3\,IE}\right]$$

$$\left[\Rightarrow \quad (8) \quad \frac{S\,c}{EA} = \left(-\frac{(F + S\sin\alpha)\,a^3}{3\,IE} - \frac{F\,b\,a^2}{2\,IE} + \delta\right)\sin\alpha\right]$$

Gleichungen (7) und (8) sind 2 weitere Gleichungen für C, S, und mit a) insgesamt 8 Gleichungen für die 8 Unbekannten: A_x, A_y, M_A, B_x, B_y, M_B, C, S.

c) Für $F = F_{\mathrm{gr}}$ gilt $C = C_{\mathrm{gr}} \stackrel{!}{=} 0$ und $S = S_{\mathrm{gr}}$. Aus Gl. (7) und (8) folgt damit:

$$\left[\Rightarrow \quad (7_{\mathrm{gr}}) \quad S_{\mathrm{gr}} = -\frac{3\,IE\,\delta}{a^3\sin\alpha}\right]$$

$$\left[\Rightarrow \quad (8_{\mathrm{gr}}) \quad \frac{S_{\mathrm{gr}}\,c}{EA} = \left(-\frac{(F_{\mathrm{gr}} + S_{\mathrm{gr}}\sin\alpha)\,a^3}{3\,IE} - \frac{F_{\mathrm{gr}}\,b\,a^2}{2\,IE} + \delta\right)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{gr}}\right]$$

Dies sind 2 Gleichungen für die 2 Unbekannten: F_{gr}, S_{gr}.

Kontrolle: Für den Spezialfall $\delta = 0$ ergibt sich daraus das zu erwartende Ergebnis: $S_{\mathrm{gr}} = F_{\mathrm{gr}} = 0$