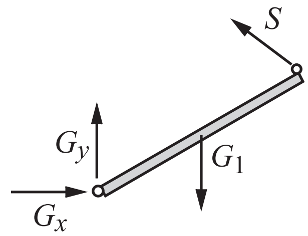
Musterlösung WS17

Aufgabe S WS17 36 Punkte

a) und b) Freischnitt Balken 1:

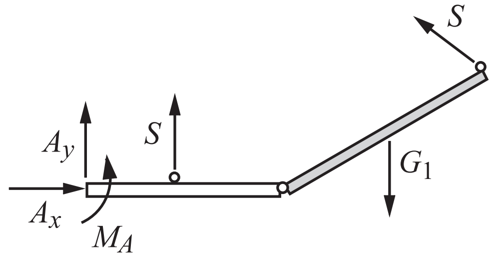


$$\sum M_{(\mathrm{G})} = 0 \quad S\ (b\cos\beta + 2a\ \sin\beta) = m_1 g\, a \quad \Rightarrow S$$

$$\sum F_x = 0 \quad G_x = S\ \cos\beta \quad \Rightarrow G_x$$

$$\sum F_y = 0 \quad G_y = m_1 g - S\ \sin\beta \quad \Rightarrow G_y$$

c) Freischnitt Balken 1 und Balken 2:



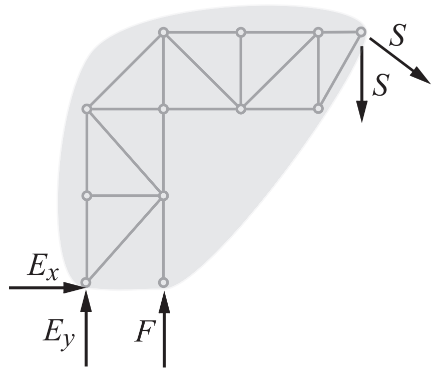
$$\sum F_x = 0 \quad A_x = S\ \cos\beta \quad \Rightarrow A_x$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y = m_1 g - S\ (1 + \sin\beta) \quad \Rightarrow A_y$$

$$\sum M_{(\mathrm{A})} = 0 \quad M_A = -S\ (b\ \cos\beta + 4a\ \sin\beta + 2a - c) + m_1 g\, 3a$$

$$\Rightarrow M_A$$

d) Freischnitt Fachwerk:



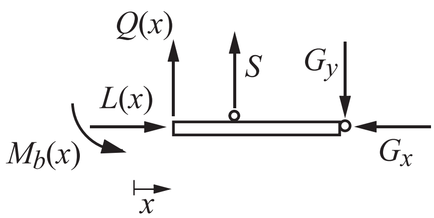
$$\sum F_x = 0 \quad E_x = -S\ \cos\beta \quad \Rightarrow E_x$$

$$\sum M_{(\mathrm{E})} = 0 \quad F\, e = S\ ((d+e)\,(\sin\beta + 1) + h\ \cos\beta) \quad \Rightarrow F$$

$$\sum F_y = 0 \quad E_y = S\ (1 + \sin\beta) - F \quad \Rightarrow E_y$$

e) Schnittreaktionen im Balken 2:

Bereich $0 \leq x < 2a - c$:

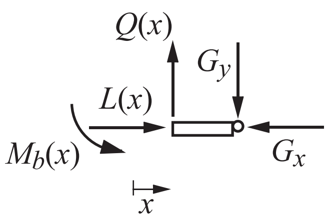


$$L(x) = +A_x = +G_x$$

$$Q(x) = +A_y = +G_y - S$$

$$M_b(X) = +M_A - A_y\, x = G_y\,(2a - x) - S\,((2a - x - c)$$

Bereich $2a - c < x < 2a$:



$$L(x) = +A_x = +G_x$$

$$Q(x) = +A_y + S = +G_y$$

$$M_b(X) = +M_A - (A_y + S)\, x = G_y\,(2a - x)$$

Aufgabe F1 WS17 25 Punkte

a) Nebenbedingungen und Hookesche Gesetze für das Problem:

$$
\begin{aligned}
&(1),(2) \quad && \sigma_{x,1} = \sigma_{x,2} = 0 \\
&(3) && \sigma_{y,1} = \sigma_{y,2} = \sigma_y \\
&(4),(5) && \sigma_{z,1} = \sigma_{z,2} = -p \\
&(6) && a + \Delta a + b + \Delta b = a + b \;\Rightarrow\; a\,\varepsilon_{y,1} + b\,\varepsilon_{y,2} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(7) \quad && \varepsilon_{x,1} = \frac{1}{E_1}\Big(-\nu_1\,(\sigma_y - p)\Big) \\
&(8) && \varepsilon_{y,1} = \frac{1}{E_1}\,(\sigma_y + \nu_1\,p) \\
&(9) && \varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1}\,(-p - \nu_1\,\sigma_y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(10) \quad && \varepsilon_{x,2} = \frac{1}{E_2}\Big(-\nu_2\,(\sigma_y - p)\Big) \\
&(11) && \varepsilon_{y,2} = \frac{1}{E_2}\,(\sigma_y + \nu_2\,p) \\
&(12) && \varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2}\,(-p - \nu_2\,\sigma_y)
\end{aligned}
$$

Dies sind zwölf Gleichungen für zwölf Unbekannte.

[Ausrechnung liefert:

$$
\sigma_x = 0\,,\; \sigma_y = -\frac{p\left(\dfrac{a}{E_1}\,\nu_1 + \dfrac{b}{E_2}\,\nu_2\right)}{\dfrac{a}{E_1} + \dfrac{b}{E_2}}\,,\; \sigma_z = -p
$$

$$
\varepsilon_{x,1} = \frac{v_1}{E_1}\,\frac{p\left(\dfrac{a}{E_1}\,(1+\nu_1) + \dfrac{b}{E_2}\,(1+\nu_2)\right)}{\dfrac{a}{E_1} + \dfrac{b}{E_2}}\,, \qquad \varepsilon_{x,2} = \frac{v_2}{E_2}\,\frac{p\left(\dfrac{a}{E_1}\,(1+\nu_1) + \dfrac{b}{E_2}\,(1+\nu_2)\right)}{\dfrac{a}{E_1} + \dfrac{b}{E_2}}
$$
]

b)

$$
\frac{c_1}{c_2} = \frac{c + \Delta c_1}{c + \Delta c_2} = \frac{1 + \varepsilon_{z,1}}{1 + \varepsilon_{z,2}} = \frac{1 + \dfrac{1}{E_1}\,(p + \nu_1\,\sigma_y)}{1 + \dfrac{1}{E_2}\,(p + \nu_2\,\sigma_y)} = \frac{1 + \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{a}{E_1} + \dfrac{b}{E_2} - \nu_1\left(\dfrac{a}{E_1}\,\nu_1 + \dfrac{b}{E_2}\,\nu_2\right)\right)}{1 + \dfrac{1}{E_2}\left(\dfrac{a}{E_1} + \dfrac{b}{E_2} - \nu_2\left(\dfrac{a}{E_1}\,\nu_1 + \dfrac{b}{E_2}\,\nu_2\right)\right)}
$$

und

$$
\frac{d_1}{d_2} = \frac{d + \Delta d_1}{d + \Delta d_2} = \frac{1 + \varepsilon_{x,1}}{1 + \varepsilon_{x,2}} = \frac{1 + \dfrac{\nu_1}{E_1}}{1 + \dfrac{\nu_2}{E_2}}
$$

c) Aus a) folgt, dass beide Quader gleich belastet werden mit

$$\sigma_x = 0\,,\ \sigma_y = -\frac{p\left(\dfrac{a}{E_1}\,\nu_1 + \dfrac{b}{E_2}\,\nu_2\right)}{\dfrac{a}{E_1} + \dfrac{b}{E_2}}\,,\ \sigma_z = -p\,,$$

so dass gilt

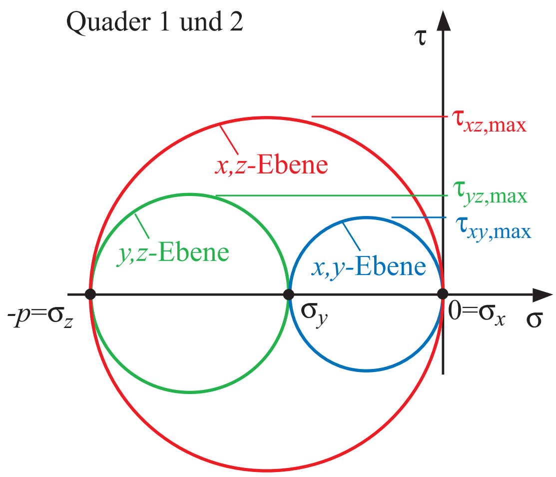
$$\sigma_z < \sigma_y < \sigma_x = 0$$

und

$$\tau_{xz,\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = \frac{-\sigma_z}{2} = \frac{p}{2}\,,$$

$$\tau_{yz,\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\,,$$

$$\tau_{xy,\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{-\sigma_y}{2}\,.$$



d) Zusätzliche Spannungen treten nur in der y-Richtung auf, wobei wieder wegen „actio=reactio“ $\sigma_{y,T,1} = \sigma_{y,T,1} = \sigma_{y,T}$ gilt. Es folgt also für die zusätzlichen Dehnungen in y-Richtung

$$\varepsilon_{y,T,1} = \frac{\sigma_{y,T}}{E_1} + \alpha_1\,\Delta T \quad \text{und} \quad \varepsilon_{y,T,2} = \frac{\sigma_{y,T}}{E_2} + \alpha_2\,\Delta T\,.$$

Weiterhin gilt die Kompabilitätsbedingung

$$a\,\varepsilon_{y,1,T} + b\,\varepsilon_{y,T,2} = 0\,,$$

so dass

$$\sigma_{y,T} = -\frac{E_1\,E_2}{a\,E_2 + b\,E_1}\,(a\,\alpha_1 + b\,\alpha_2)\,\Delta T\,.$$

Aufgabe F2 WS17 46 Punkte

a) Verschiebeplan (allgemeiner Fall) mit Balkenlängsdehnung $u_\mathrm{G} = 0$:

(1) $$u_\mathrm{I} \;=\; u_\mathrm{G} + \delta_h = \delta_h$$

(2) $$v_\mathrm{I} \;=\; v_\mathrm{G} + \delta_v$$

Stabdehnungen (allgemeiner Fall):

(3) $$\Delta l_1 \;=\; (-u_\mathrm{I} + u_\mathrm{II})\,\cos\alpha + (v_\mathrm{I} - v_\mathrm{II})\,\sin\alpha$$

(4) $$\Delta l_2 \;=\; +u_\mathrm{II}\,\cos\alpha + v_\mathrm{II}\,\sin\alpha$$

(5) $$\Delta l_3 \;=\; u_\mathrm{II}$$

Balkenbiegung (allgemeiner Fall):

$$v_\mathrm{G}\,\cos\delta\varphi = -\frac{(S_1\,\sin(\alpha+\delta\varphi) + F\,\cos\delta\varphi)\,a^3}{3\,IE} - \frac{F\,b\,a^2}{2\,IE}$$

Linearisierung für $\delta\varphi << 1$, $\varphi << \alpha$:

(6) $$v_\mathrm{G} = -\frac{(S_1\,\sin\alpha + F)\,a^3}{3\,IE} - \frac{F\,b\,a^2}{2\,IE}$$

Gleichgewicht am Knoten II:

(7) $$S_1\,\sin\alpha = S_2\,\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad S_1 = S_2$$

(8) $$S_3 = -2\,S_1\,\cos\alpha$$

Spannungs-Dehnungs-Beziehung (Hooke):

(9) $$\Delta l_1 \;=\; l_1\,\frac{S_1}{EA} \quad \text{mit} \quad l_1 = \frac{h}{\sin\alpha}$$

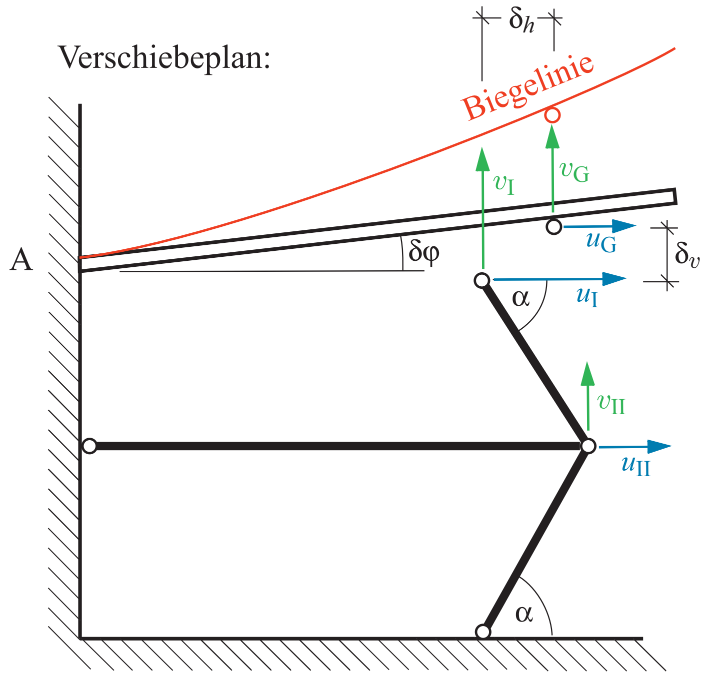
(10) $$\Delta l_2 \;=\; l_2\,\frac{S_2}{EA} \quad \text{mit} \quad l_2 = \frac{h}{\sin\alpha}$$

(11) $$\Delta l_3 \;=\; l_3\,\frac{S_3}{EA} \quad \text{mit} \quad l_3 = a + h\,\cot\alpha$$

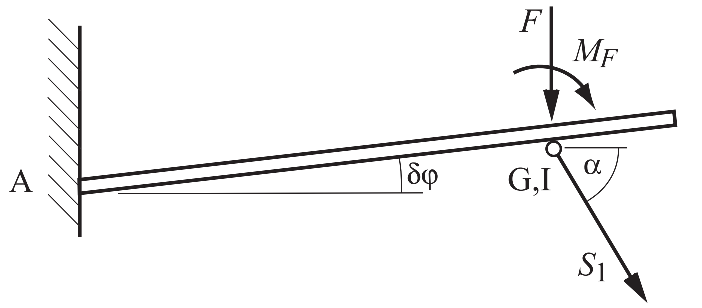
Dies sind 11 Gleichungen für die 11 Unbekannten:

u_I, v_I, u_II, v_II, v_G, Δl_1, Δl_2, Δl_3, S_1, S_2 und S_3

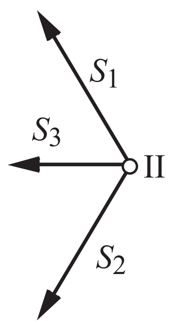
Verschiebeplan:



Ersatzsystem Balken (Bereich A bis G,I):



Freischnitt Knoten II:



b) Spezialfall $F = 0$: Gelenk G bleibt ortsfest

$$(12)\quad \left.\begin{aligned} v_{\mathrm{G},0} &= 0 \\ u_{\mathrm{I},0} &= \delta_h \\ v_{\mathrm{I},0} &= \delta_v \\ u_{\mathrm{II},0} &= 0 \\ v_{\mathrm{II},0} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Delta l_1 = -\delta_h \cos\alpha + \delta_v \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{-\delta_h \cos\alpha + \delta_v \sin\alpha}{\alpha_T\, l_1} \quad \text{mit} \quad l_1 = \frac{h}{\sin\alpha}$$

c) Spezialfall: Stäbe ungedehnt und kräftefrei $\Rightarrow$ Stab 1 führt reine Drehung um unverschobenen Knoten II aus.

$$\Rightarrow \quad \Delta l_l = \Delta l_2 = \Delta l_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_1^* \equiv 0$$

Aus den allgemeinen Beziehungen

$$(13) \qquad v_{\mathrm{G}}^* = -\frac{F^*\, a^3}{3\, IE} - \frac{F^*\, b\, a^2}{2\, IE}$$

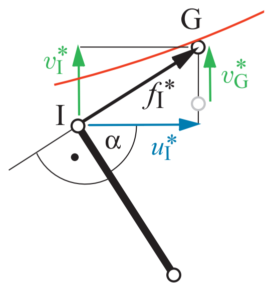
Stabdehnungen Spezialfall a), kräftefrei $\Rightarrow$ Stab 1 führt reine Drehung um unverschobenen Knoten II aus:

$$(14) \qquad u_{\mathrm{II}}^* = v_{\mathrm{II}}^* = 0\,,$$

$$(15) \qquad u_{\mathrm{I}}^* = f_{\mathrm{I}}^* \sin\alpha = \delta_h\,,$$

$$(16) \qquad v_{\mathrm{I}}^* = f_{\mathrm{I}}^* \cos\alpha = v_{\mathrm{G}}^* + \delta_v$$

Verschiebeplan Knoten I und Gelenk G für Spezialfall c):



$$\left[\text{Ausrechnung:} \qquad F^* = \frac{3\, IE}{a^3}\, \frac{\delta_v - \delta_h \cot\alpha}{1 + 3b/(2a)}\right]$$

d) Freischnitt Balken 4 und Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0 && A_x = -S_3 \cos\alpha = 0 \\ &\sum F_y = 0 && A_y + S_3 \sin\alpha + F \\ &\sum M_{(\mathrm{A})} = 0 && M_A = S_3\, a \sin\alpha + F\, b \end{aligned}$$