Musterlösung Mechanik II SS12

Aufgabe D1 H12

a) Definition: $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

Mit $a = a(v)$ liefert Trennung der Variablen und Einsetzen $\quad \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}v}{a(v)} = -\dfrac{v}{c}\,\mathrm{d}v$

und die Integration:

$$t - \cancelto{0}{t_0} = \frac{1}{2c}\left(v_2^2 - v^2\right) \quad (*) \quad \Rightarrow \quad t_e = \frac{v_2^2}{2c}$$

Definition: $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad (**)$

Mit $v(t)$ aus (*) und Trennung der Variablen lässt sich (**) ebenfalls integrieren:

$$s - \cancelto{0}{s_0} = \frac{1}{3c}\,v_2^3 - \frac{1}{3c}\left(v_2^2 - 2ct\right)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad s_e = \frac{v_2^3}{3c}$$

Kontrollen:

1. Dimensionen: Mit $[\,c\,] = [\,a\,v\,] = \dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$ ergibt sich $[\,t_e\,] = \mathrm{s}$ und $[\,s_e\,] = \mathrm{m} \quad \surd$
2. Spezialfälle: $\quad t = 0 \;\rightarrow\; s = 0\,, \quad t = t_e \;\rightarrow\; s = s_e \quad \surd$
3. Ableitung: $\quad \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v = \left(v_2^2 - 2ct\right)^{1/2} \quad \surd$

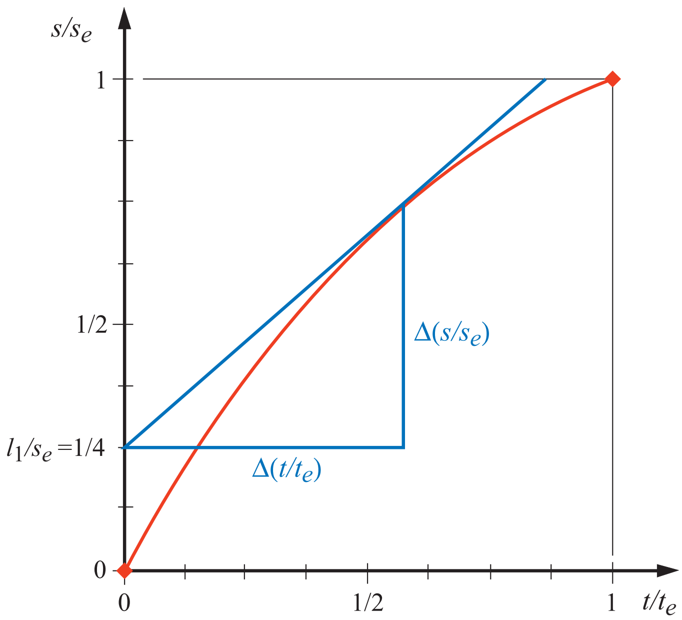
b) Die dimensionslose Darstellung lautet: $\quad \dfrac{s}{s_e} = 1 - \left(1 - \dfrac{t}{t_e}\right)^{3/2}$

Die Spezialfälle liefern bereits zwei Punkte der Kurve im Weg-Zeit-Diagramm des PKWs. Da die Steigung der Kurve, nämlich v, stets positiv ist und monoton abnimmt (Bremsen), ergibt sich qualitativ der im Diagramm eingetragene Verlauf (rote Kurve).

Das Weg-Zeit-Gesetz des LKWs (blaue Kurve) startet bei $\dfrac{s}{s_e}(\dfrac{t}{t_e} = 0) = \dfrac{l_1}{s_e}$ und ist wegen der konstanten Geschwindigkeit des LKWs eine Gerade.

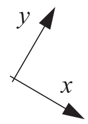
Die notwendige Geschwindigkeit des LKWs ergibt sich, wenn das Weg-Zeit-Gesetz des LKWs Tangente an das Weg-Zeit-Diagramm des PKWs ist. Man kann ablesen:

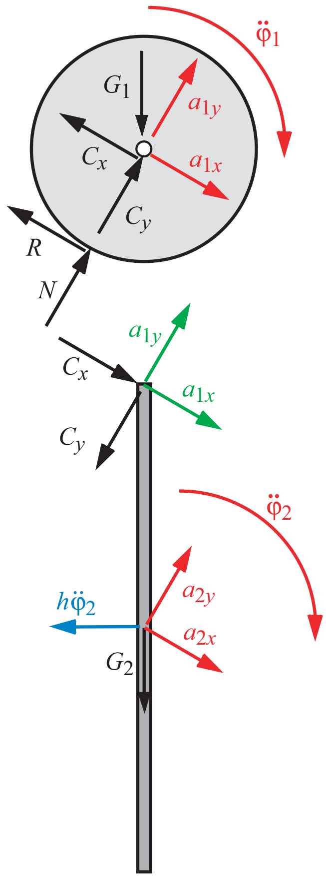
$$v_1 = \frac{\Delta(s/s_e)}{\Delta(t/t_e)}\,\frac{s_e}{t_e} \approx \frac{2}{3}\,\frac{s_e}{t_e} = \frac{4}{9}\,v_2$$



Aufgabe D2 H12

		Unbek.	Summe
(1)	$R = \mu_{\mathrm{G}}\, N$	$R\,,\ N$	2
(2)	$m_1\, a_{1y} = 0 = N + C_y - m_1\, g\, \cos\alpha$	C_y	3
(3)	$m_1\, a_{1x} = -R - C_x + m_1\, g\, \sin\alpha$	$a_{1x}\,,\ C_x$	5
(4)	$J_1\, \ddot{\varphi}_1 = R\, r$	$\ddot{\varphi}_1$	6
(5)	$m_2\, a_{2y} = -C_y - m_2\, g\, \cos\alpha$	a_{2y}	7
(6)	$m_2\, a_{2x} = +C_x + m_2\, g\, \sin\alpha$	a_{2x}	8
(7)	$J_2\, \ddot{\varphi}_2 = C_x\, h\, \cos\alpha - C_y\, h\, \sin\alpha$	$\ddot{\varphi}_2$	9
(8)	$a_{2x} = a_{1x} - h\, \ddot{\varphi}_2\, \cos\alpha$		9
(9)	$a_{2y} = a_{1y} - h\, \ddot{\varphi}_2\, \sin\alpha$		9





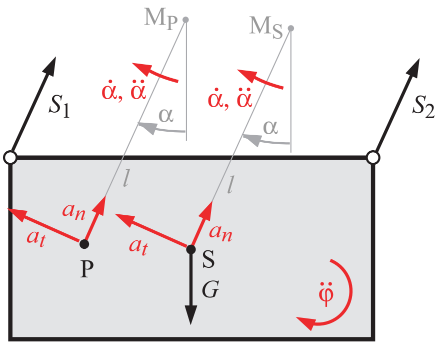
Aufgabe D3 H12

a) Durch die Stabführung bleibt die Kanten des Dreiecks zu allen Zeiten parallel zur Ausgangsstellung. Bei der Bewegung handelt es sich deshalb um eine reine Translation. Die Scheibe wird nicht rotatorisch bewegt und besitzt deshalb auch keine Winkelbeschleunigung: $\ddot{\varphi} \equiv 0$.

b) Mit Euler folgt für die reine Translation: $\vec{a}_{\mathrm{P}_2} = \vec{a}_{\mathrm{P}_1}$ wegen $\vec{a}_{\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_1} \equiv \vec{0}$ für beliebige Punkte P_1 und P_2.

c) Wegen der reinen Translation führen alle Punkte der Scheibe Kreisbewegungen mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vec{\alpha}}$ und Winkelbeschleunigung $\ddot{\vec{\alpha}}$ mit durch die Stablänge vorgegebenem Radius $r = l$ aus.

Alle Punkte der Scheibe besitzen daher die gleiche Normal- und Tangentialbeschleunigung.



Beschleunigung in normaler Richtung bei Bewegung aus der Ruhe $\dot{\alpha}(t=0) \equiv 0$ (Kinematik):

$$a_n = l\,\dot{\alpha}^2(t=0) = 0$$

Schwerpunktsatz in tangentialer Richtung (Kinetik):

$$m\,a_t = -m\,g\,\sin\alpha_0\ (= m\,l\,\ddot{\alpha}(t=0)) \quad \Rightarrow \quad a_t = -g\,\sin\alpha_0$$

d) Drallsatz um Schwerpunkt S (keine Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ der Scheibe):

$$J_{\mathrm{S}}\,\ddot{\varphi} = 0 = S_1\,\cos\alpha_0\,d - S_2\,\cos\alpha_0\,d + (S_1 + S_2)\,\sin\alpha_0\,h \quad (1)$$

Schwerpunktsatz in Normalenrichtung:

$$m\,a_n(\alpha_0) \equiv 0 = S_1 + S_2 - m\,g\,\cos\alpha_0 \quad (2)$$

Auflösung:

$$S_1 = \frac{m\,g}{2}\left(\cos\alpha_0 - \frac{h}{d}\,\sin\alpha_0\right), \quad S_2 = \frac{m\,g}{2}\left(\cos\alpha_0 + \frac{h}{d}\,\sin\alpha_0\right)$$

e) Energieerhaltung $T + V = const$ (alle Punke haben die gleiche Geschwindigkeit $v = l\,\dot{\alpha}$):

$$\frac{1}{2}\,m\,v(\alpha)^2 + l\,(1-\cos\alpha)\,m\,g = 0 + l\,(1-\cos\alpha_0)\,m\,g \quad \Rightarrow \quad v(\alpha) = l\,\dot{\alpha} = \sqrt{2l\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)\,g}$$

f) Zeitliche Differentiation von $T + V = const$ oder aus a) für beliebigen Winkel α:

$$m\,l^2\,\dot{\alpha}\,\ddot{\alpha} + = l\,m\,g\,(\sin\alpha)\,\dot{\alpha} = 0 \quad \overset{\dot{\alpha}\neq 0}{\Rightarrow} \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\,\sin\alpha = 0$$

Eigenkreisfrequenz wie mathematisches Pendel mit Pendellänge l: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$