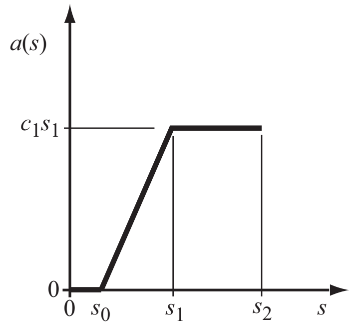
Musterlösung Mechanik II SS13

Aufgabe D1 H13

A)

a) siehe Abbildung



b) Es gilt: $a(s) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad v^2(s) = \displaystyle\int 2a(s)\,\mathrm{d}s$

Für: $0 \le s \le s_0: \quad v = v_0$

Für: $s_0 \le s \le s_1: \quad \displaystyle\int 2a(s)\,\mathrm{d}s = \int 2c_1 s\,\mathrm{d}s = c_1 s^2 + C_1$

Für: $s_1 \le s \le s_2: \quad \displaystyle\int 2a(s)\,\mathrm{d}s = \int 2c_1 s_1\,\mathrm{d}s = 2\,c_1 s_1 s + C_2$

Mit $v(s_0) = v_0$ und $v(s_1) = c_1 s_1^2$ lauten die Konstanten:

$$C_1 = v_0^2 - c_1\,s_0^2\,, \quad C_2 = v_1^2 - 2c_1 s_1^2 \text{ mit } v_1^2 = v_0^2 + c_1\,(s_1^2 - s_0^2).$$

$$\Rightarrow \quad v(s) = \begin{cases} v_0 & , \quad 0 \le s \le s_0 \\ \sqrt{v_0^2 + c_1\,(s^2 - s_0^2)} & , \quad s_0 \le s \le s_1 \quad \to \text{bei } s = s_1: \ v_1 = \sqrt{v_0^2 + c_1\,(s_1^2 - s_0^2)} \\ \sqrt{v_1^2 + 2c_1\,s_1\,(s - s_1)}, & \quad s_1 \le s \le s_2 \quad \to \text{bei } s = s_2: \ v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2c_1 s_1\,(s_2 - s_1)}. \end{cases}$$

c) $$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \to \quad \int_0^{t_2} \mathrm{d}t = \int_0^{s_2} \frac{\mathrm{d}s}{v} \quad \text{mit} \quad v(s) = \begin{cases} v_0 & , \quad 0 \le s \le s_0 \\ \sqrt{v_0^2 + c_1\,(s^2 - s_0^2)} & , \quad s_0 \le s \le s_1 \\ \sqrt{v_1^2 + 2c_1\,s_1\,(s - s_1)}, & \quad s_1 \le s \le s_2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = \int_0^{s_0} \frac{\mathrm{d}s}{v_0} + \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{v_0^2 + c_1\,(s^2 - s_0^2)}} + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{v_1^2 + 2c_1\,s_1\,(s - s_1)}}$$

Die Berechnung des dritten Integrals lässt sich umgehen. Die Beschleunigung ist hier konstant.

Aus $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ folgt $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}v}{a}$ bzw. integriert $t_2 - t_1 = \dfrac{v_2 - v_1}{a(s_2)}$.

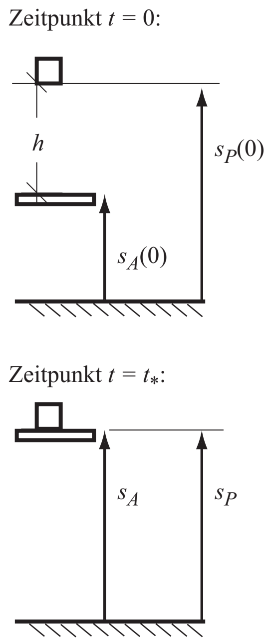
$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{s_0}{v_0} + \int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{v_0^2 + c_1\,s^2}} + \frac{\sqrt{v_1^2 + 2c_1 s_1\,(s_2 - s_1)} - \sqrt{v_0^2 + c_1\,(s_1^2 - s_0^2)}}{c_1 s_1}$$

Bemerkung:

Für $v_0 = 0$ liefert das erste Integral, aber auch das zweite Integral einen unendlichen Wert für die Zeit.
Dies ist sinnvoll. Denn sollte das Fahrzeug bei $s = s_0$ noch stehen, $v(s_0) = 0$, so kommt es dort mit der vorgegebenen Funktion für die Beschleunigung wegen $a(s_0) = 0$ nicht von der Stelle.

B)

a) Weg-Zeit-Gesetze:



$$s_A(t) = v_A\, t + s_A(0)\ , \quad s_P(t) = -1/2\, g\, t^2 + v_A\, t + s_P(0)$$

Es gilt: $s_A(0) = s_A\,,\ s_P(0) = s_A + h$

Beim Aufprall $t = t^*$ befinden sich Aufzug und Paket an der gleichen Stelle $s(t^*)$:

$$s_P(t^*) = s_A(t^*) = s(t^*) :$$

$$-\frac{1}{2}\, g\, t^{*2} + v_A\, t^* + s_A + h = v_A\, t^* + s_A \quad \Rightarrow \quad t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Rightarrow \quad s_* = s(t^*) = v_A\, t^* = v_A \sqrt{\frac{2h}{g}} + s_A$$

b) Die Lösung zeigt, dass die Fallzeit t_* nicht von der Geschwindigkeit des Fahrstuhls abhängt. Der Fahrstuhl stellt für das Problem ein Inertialsystem dar, dessen Geschwindigkeit die Fallzeit nicht beeinflussen darf $\leftarrow$ klassisches Relativitätsprinzip.

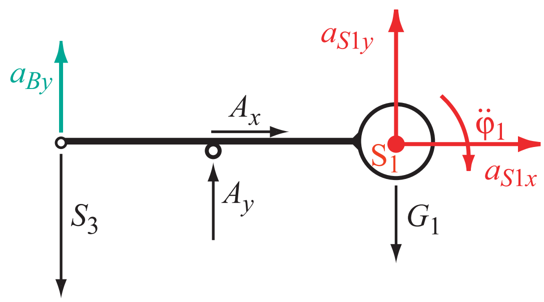
Aufgabe D2 H13

a)

Glg				Unbekannte	Summe
(1)	$J_\mathrm{A}\,\ddot{\varphi}_1$	$=$	$-S_3\,a + m_1\,g\,b$	$J_\mathrm{A}, S_3, \ddot{\varphi}_1$	3
(2)	J_A	$=$	$J_1 + m_1 b^2$		
(3)	$J_{\mathrm{S}_2}\,\ddot{\varphi}_2$	$=$	$S_3\,s - (m_{2.1}\,(c+s) - m_{2.2}\,(d-s))\;g$	$J_{\mathrm{S}_2}, \ddot{\varphi}_2, s$	6
(4)	J_{S_2}	$=$	$m_{2.1}\,(c+s)^2 + m_{2.2}\,(d-s)^2$		
(5)	0	$=$	$m_{2.1}\,(c+s) - m_{2.2}\,(d-s)$		
(6)	$(m_{2.1} + m_{2.2})\;a_{\mathrm{S}_2 y}$	$=$	$S_3 - (m_{2.1} + m_{2.2})\,g$	$a_{\mathrm{S}_2 y}$	7

Kompatibilität:

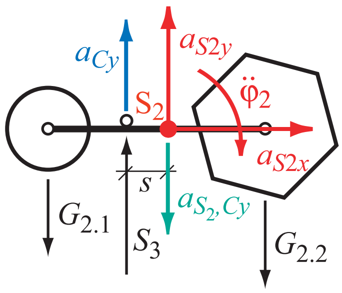
$$\left.\begin{aligned} a_{\mathrm{C}y} &= a_{\mathrm{B}y} \\ a_{\mathrm{B}y} &= a\,\ddot{\varphi}_1 \\ a_{\mathrm{S}_2,y} &= a_{\mathrm{C}y} + a_{\mathrm{S}_2,Cy} \\ a_{\mathrm{S}_2,Cy} &= -s\,\ddot{\varphi}_2 \end{aligned}\right\} \quad (7) \quad a_{\mathrm{S}_2,y} = a\,\ddot{\varphi}_1 - s\,\ddot{\varphi}_2$$



7 Glgen mit 7 Unbekannten $\quad\Rightarrow\quad S_3$

b)

$$\begin{aligned} m_1\,a_{\mathrm{S}_1 x} &= A_x = -m_1\,b\,\dot{\varphi}_1^2 = 0 \\ m_1\,a_{\mathrm{S}_1 y} &= A_y - S_3 - m_1\,g \\ a_{\mathrm{S}_1 y} &= -b\,\ddot{\varphi}_1 \end{aligned}$$



Mit S_3 und $\ddot{\varphi}_1$ aus a) sind A_x und A_y bestimmt.

Aufgabe D3 H13

Fallunterscheidung und Nebenbedingungen:

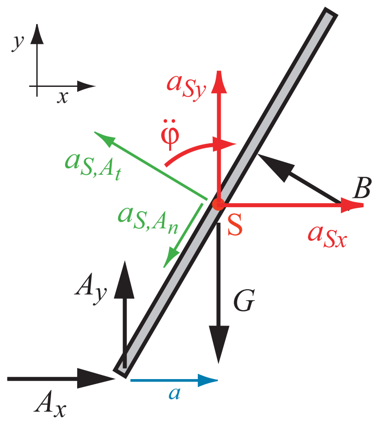
Fall 1 falls $a < a_{\max}$: $\ddot{\varphi} = 0$ und $B > 0$

Fall 2 falls $a = a_{\max}$: $\ddot{\varphi} = 0$ und $B = 0$

a) Fall 1:

Glg				Unbekannte	Summe
(1)	$J_S\,\ddot{\varphi} = 0$	$=$	$-A_x\,b\sin\alpha + A_y\,b\cos\alpha - B\,b$	$A_x,\ A_y,\ B$	3
(2)	$m\,a_{Sx}$	$=$	$+A_x - B\,\sin\alpha$	a_{Sx}	4
(3)	$m\,a_{Sy}$	$=$	$+A_y + B\,\cos\alpha - mg$	a_{Sy}	5
(4)	a_{Sx}	$=$	$+a_{Ax} - a_{S,A_t}\,\sin\alpha - a_{S,A_n}\,\cos\alpha = a + b\,\ddot{\varphi}\,\sin\alpha - b\,\dot{\varphi}^2\cos\alpha$	$\dot{\varphi}$	6
(5)	a_{Sy}	$=$	$+a_{Ay} + a_{S,A_t}\,\cos\alpha - a_{S,A_n}\,\sin\alpha = -b\,\ddot{\varphi}\,\cos\alpha - b\,\dot{\varphi}^2\sin\alpha$		
(6)	$\dot{\varphi}$	$=$	0		

Glg				Unbekannte	Summe
(1′)	0	$=$	$-A_x\,\sin\alpha + A_y\,\cos\alpha - B$	$A_x,\ A_y, B$	3
(2′)	$m\,a$	$=$	$+A_x - B\,\sin\alpha$		
(3′)	mg	$=$	$+A_y + B\,\cos\alpha$		



(außerdem: $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

$\Rightarrow \quad A_x\,,\ A_y\,,\ B$

Ausrechnung:

$$B = m\,\frac{g\cos\alpha - a\sin\alpha}{2} \qquad \text{(vergl. Ausrechnung von } a_{\max}\text{)}$$

$$A_x = m\left(a + \frac{g\cos\alpha - a\sin\alpha}{2}\,\sin\alpha\right), \quad A_y = m\left(g + \frac{g\cos\alpha - a\sin\alpha}{2}\,\cos\alpha\right)$$

b) Fall 2

Glg				Unbekannte	Summe
(1″)	0	$=$	$-A_x\sin\alpha + A_y\cos\alpha$	$A_x,\ A_y,\ B$	2
(2″)	$m\,a_{\max}$	$=$	$+A_x$	$a_{\max}$	3
(3″)	0	$=$	$+A_y - mg$		

$$\Rightarrow \quad A_x = A_y\,\cot\alpha = mg\,\cot\alpha\,,\ a_{\max} = g\,\cot\alpha$$

Mit $\alpha = \pi/4$ folgt: $a_{\max} = g$

c) Fall 1 oder $a < a_{\max} = g\,,\ B > 0$

Glg				Unbekannte	Summe
$(1'') \to (1''')$	0	$=$	$-A_x\,\sin\alpha + A_y\,\cos\alpha - B$	$A_x,\ A_y, B$	3
$(2'') \to (2''')$	$m\,a$	$=$	$+A_x - B\,\sin\alpha$		
$(3'') \to (3''')$	mg	$=$	$+A_y + B\,\cos\alpha$		
$(4''')$	μ	$\geq$	$\dfrac{\lvert R\rvert}{N} = \dfrac{A_x}{A_y} = \mu_{\min}$		

$$\Rightarrow \quad \mu_{\min} = \frac{2\,a + g\sin\alpha\cos\alpha - a\sin^2\alpha}{2\,g + g\cos^2\alpha - a\sin\alpha\cos\alpha}$$

Mit $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ folgt speziell: $\quad \mu_{\min} = \dfrac{3\,a + g}{5\,g - a}$

($a = a_{\max} = g$: $\quad \mu_{\min} = 1$ Ein Wert der durch keine Materialpaarung erreicht werden kann. In der Realität setzt also auf jeden Fall Rutschen ein.)