Musterlösung Mechanik II H14

Aufgabe D1 H14

a) Das Weg-Zeit-Gesetz des Bahnreisenden lautet einfach: $s = v_0\, t$

Für den Zug gilt: $a_Z = \dfrac{k^2}{4}\, s_Z = v_Z\, \dfrac{\mathrm{d}v_Z}{\mathrm{d}s_Z}$

Trennung der Variablen und unbestimmte Integration liefert: $v_Z^2 = \dfrac{k^2}{4}\, s_Z^2 + C_1$

Mit $v_Z^2(s_Z = l) \stackrel{!}{=} \dfrac{k^2}{4}\, l^2$ folgt: $C_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad v_Z = \frac{k}{2}\, s_Z$$

Wegen $\dfrac{\mathrm{d}s_Z}{\mathrm{d}t} = v_Z$ ergibt sich nach Trennung der Variablen $\mathrm{d}t = \dfrac{2}{k}\, \dfrac{\mathrm{d}s_Z}{s_z}$.

Unbestimmte Integration liefert: $t = \dfrac{2}{k}\, \ln\left(\dfrac{s_Z}{C_2}\right)$

Mit $s_Z(t=0) = l$ folgt $C_2 = l$ und $t = \dfrac{2}{k}\, \ln\left(\dfrac{s_Z}{l}\right)$.

$$\Rightarrow \quad \text{Weg-Zeit-Gesetz des Zuges: } s_Z = l\, \exp\left(\frac{k\, t}{2}\right)$$

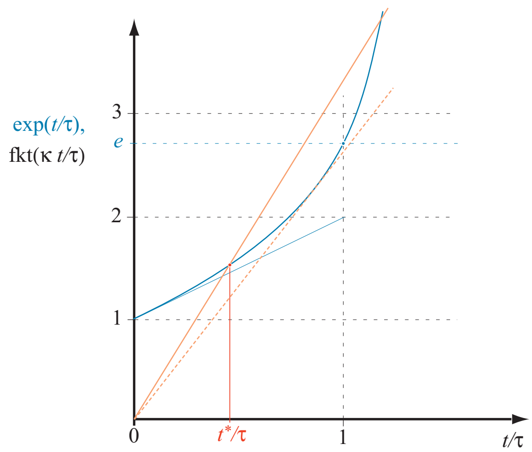
b) Die Bedingung für das Erreichen des Zuges lautet gleicher Ort zur gleichen Zeit also:

$$s(t^*) \stackrel{!}{=} s_Z(t^*) \quad \Rightarrow \quad v_0\, t^* = l\, \exp\left(\frac{k\, t^*}{2}\right)$$

c) Aus b) folgt $\exp\left(\dfrac{t^*}{\tau}\right) = \dfrac{v_0}{l}\, t^* \stackrel{!}{=} \kappa\, \dfrac{t^*}{\tau}$.

Zeitkonstante τ: $\quad \tau = \dfrac{2}{k}$

Dimensionslose Konstante K: $\quad \kappa = \dfrac{v_0\, \tau}{l} = \dfrac{2\, v_0}{k\, l}$



d) siehe Diagramm
Bei ausreichend großer Laufgeschwindigkeit des Bahnreisenden ergeben sich bis auf einen Spezialfall stets zwei Lösungen.

e) Die Geschwindigkeitsdifferenz bei Erreichen des Zuges lautet:

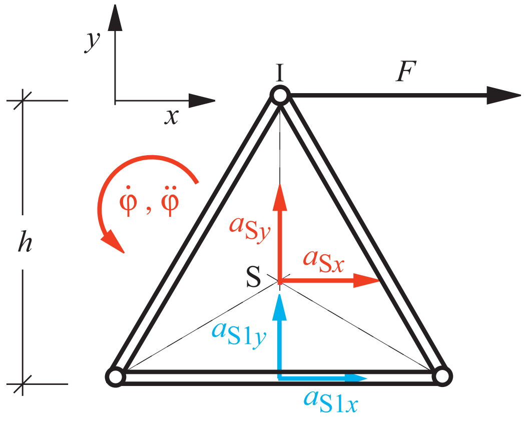
$$v_0 - v_Z = v_0 - \frac{l}{\tau}\, \exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right)$$

f) Bedingung: $v_0 - v_Z \stackrel{!}{>} 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 > v_{0,\min}$

$$\Rightarrow \quad v_{0,\min} = v_Z(t^*) = \frac{l}{\tau}\, \exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right) \quad \text{oder} \quad \kappa_{\min} = \exp\left(\frac{t^*}{\tau}\right)$$

Aufgabe D2 H14

a) Mit dem Satz von Steiner:



$$J_\mathrm{S} = 3\left(J_m + \frac{1}{9}mh^2\right) \; , \; h^2 = k^2 - \frac{k^2}{4} = \frac{3k^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad J_\mathrm{S} = 3J_m + \frac{1}{4}mk^2$$

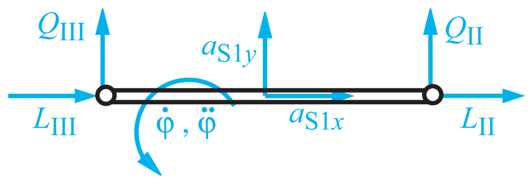
b) Euler: $\vec{a}_{\mathrm{S}1} = \vec{a}_\mathrm{S} + \vec{a}_{\mathrm{S}1,\mathrm{S}}$

Translatorische Beschleinigung des Schwerpunkts mit Schwerpunktsatz für das Gesamtsystem:

$$\vec{a}_\mathrm{S} = \frac{\vec{F}}{3m} \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{S}x} = \frac{F}{3m} \; , \; a_{\mathrm{S}y} = 0$$

In x-Richtung lt. Verschiebeplan:

$$a_{\mathrm{S}1x} = a_{\mathrm{S}x} + \frac{h}{3}\ddot{\varphi}$$



Winkelbeschleinigung mit Drallsatz für das Gesamtsystem:

$$J\ddot{\varphi} = -F\frac{2h}{3} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -F\frac{2h}{3J}$$

In y-Richtung lt. Verschiebeplan:

$$a_{\mathrm{S}1y} = \cancelto{0}{a_{\mathrm{S}y}} + \frac{h}{3}\dot{\varphi}^2 \text{ mit } \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t = t_0) = \omega_0$$

c) Schwerpunktsatz in y-Richtung und Drallsatz für Bauteil 1 lt. Freischnitt:

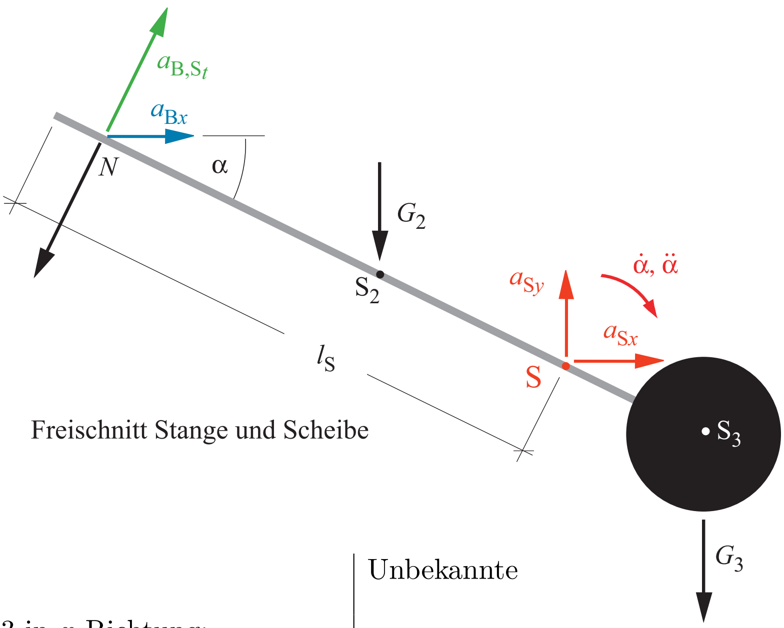
$$m a_{\mathrm{S}1y} = Q_{\mathrm{III}} + Q_{\mathrm{II}} = \frac{h}{3}m\omega_0^2$$

$$J_m\ddot{\varphi} = \Big(-Q_{\mathrm{III}} + Q_{\mathrm{II}}\Big)\frac{k}{2} = -\frac{J_m}{J}\frac{2h}{3}F$$

$$\overset{\sum}{\Rightarrow} \quad Q_{\mathrm{II}} = \frac{h}{6}m\omega_0^2 - \frac{2h}{3k}\frac{J_m}{J}F \, , \quad \overset{\triangle}{\Rightarrow} \quad Q_{\mathrm{III}} = \frac{h}{6}m\omega_0^2 + \frac{2h}{3k}\frac{J_m}{J}F \, ,$$

Aufgabe D3 H14

a)



Freischnitt Stange und Scheibe

		Unbekannte
Schwerpunktsatz für Körper 2 und 3 in x-Richtung:		
$(m_2+m_3)\,a_{\mathrm{S}x} = -N\,\sin\alpha$	(1)	$a_{\mathrm{S}x},\ N$
Schwerpunktsatz für Körper 2 und 3 in y-Richtung:		
$(m_2+m_3)\,a_{\mathrm{S}y} = -N\,\cos\alpha - G_2 - G_3$	(2)	$a_{\mathrm{S}y}$
Drallsatz um Schwerpunkt für Körper 2 und 3:		
$J_\mathrm{S}\,\ddot\alpha = -N\,(l_\mathrm{S}-d)$	(3)	$\ddot\alpha,\ l_\mathrm{S},\ J_\mathrm{S}$
Schwerpunkt:		
$l_\mathrm{S} = \dfrac{\big((b-r)/2\big)\,m_2 + b\,m_3}{m_2+m_3}$	(4)	
Massenträgheitsmoment:		
$J_\mathrm{S} = J_2 + m_2\left(l_\mathrm{S} - \dfrac{b-r}{2}\right)^2 + J_3 + m_3\,(b-l_\mathrm{S})^2$	(5)	
Euler: $\vec a_\mathrm{B} = \vec a_\mathrm{S} + \vec a_{\mathrm{B,S}}$		
in x-Richtung:		
$a_{\mathrm{B}x} = 2a\,\dot\beta^2 = 0 = a_{\mathrm{S}x} + (l_\mathrm{S}-d)\,\ddot\alpha\,\sin\alpha + l_\mathrm{S}\cancelto{0}{\dot\alpha^2}\,\cos\alpha$	(6)	

Aus (3) in (1) mit (6) folgt :

$$\left(m_2+m_3+\frac{J_\mathrm{S}}{(l_\mathrm{S}-d)^2}\right)a_{\mathrm{S}x} = 0 \quad\Rightarrow\quad a_{\mathrm{S}x}=0\,,\ N=0\,,\ \ddot\alpha=0$$

b)

Unbekannte

Schwerpunktsatz für Körper 1 in x-Richtung:

$$m_1\, a_{S1x} = a\dot{\beta}^2 = 0 = A_x \tag{5}$$

Unbekannte: A_x

Schwerpunktsatz für Körper 1 in y-Richtung:

$$m_1\, a_{S1y} = -G_1 + A_y \tag{6}$$

Unbekannte: a_{S1y}, A_y

Drallsatz um festen Punkt A:

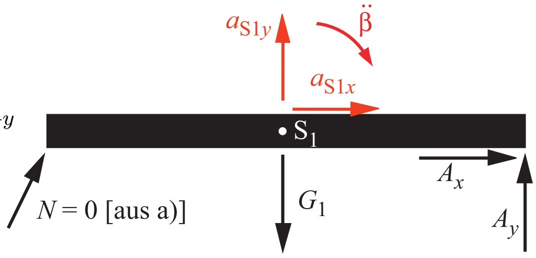
$$J_1\, \ddot{\beta} = -A_y\, a \tag{7}$$

Unbekannte: $\ddot{\beta}$

Euler: $\vec{a}_{S1} = \vec{a}_{A} + \vec{a}_{S1,A}$

in y-Richtung:

$$a_{S1y} = a\,\ddot{\beta} \tag{8}$$



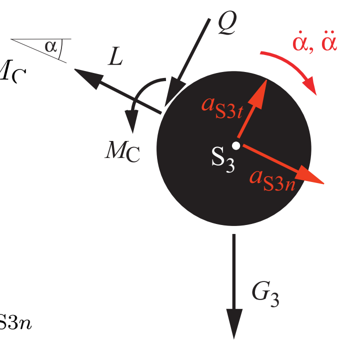
Freischnitt Balken

$$\Rightarrow \quad a_{S1y} = -\frac{g}{1 + \dfrac{J_1}{m_1\, a^2}}\,,\ \ddot{\beta} = -\frac{g}{a}\,\frac{m_1\, a^2}{J_1 + m_1\, a^2}\,,\ A_y = \left(\frac{J_1}{J_1 + m_1\, a^2}\right) m_1\, g < G_1$$

c)

Unb.

Freischnitt Scheibe



Drallsatz um den Schwerpunkt S_3 der Scheibe:

$$J_{S_3}\, \ddot{\alpha} = 0 = -Q\, r - M_C \tag{I}$$

Unb.: $Q,\ M_C$

Schwerpunktsatz für Scheibe in tangentialer Richtung:

$$m_3\, a_{S3t} = -Q - G\, \cos\alpha \tag{II}$$

Unb.: a_{S3t}

Schwerpunktsatz für Scheibe in normaler Richtung:

$$m_3\, a_{S3n} = -L + G\, \sin\alpha \tag{III}$$

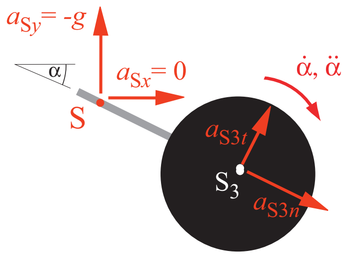
Unb.: $L,\ a_{S3n}$

aus a) - nur Translation von Stange und Scheibe mit:

$a_{Sy} = -g\,,\ a_{Sx} = 0\,,\ \ddot{\alpha} = 0\,,\ \dot{\alpha} = 0$

$\Rightarrow$ (mit Euler:) $\quad a_{S3t} = -g\,\cos\alpha\,,\ a_{S3n} = g\,\sin\alpha \qquad$ (IV), (V)

Kinematik Scheibe



$$\Rightarrow \quad L = Q = 0\,,\ M_C = 0$$