Musterlösung Mechanik II SS15

Aufgabe D1 H15 (14 Punkte)

a) Potential der Federkraft V_{Feder} (s gemessen vom Ort der ungespannten Länge des Seiles)

$$V_{\text{Feder}} = \int_0^s c\,s'\,\mathrm{d}s' = \frac{1}{2}\,c\,s^2$$

b) Energieerhaltung mit Umkehrung der Bewegungsrichtung, Bedingung $v = 0$ am Umkehrpunkt bei $s = s_{\max}$ (Wahl des Nullpunktes der potentiellen Energie bei $s = 0$):

$$mgl = -mgs_{\max} + \frac{1}{2}\,c\,s_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad s_{\max 1,2} = \frac{mg}{c}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\,c\,l}{mg}}\right)$$

Am <u>unteren</u> Umkehrpunkt ist $s_{\max} = \max(s_{\max_1},\, s_{\max_2}) = \dfrac{mg}{c}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2\,c\,l}{mg}}\right)$.[1]

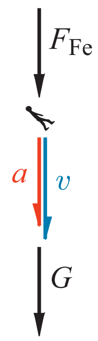
$$\Rightarrow \quad h \geq l + s_{\max} = l + \frac{mg}{c}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\,c\,l}{mg}}\right)\,, \; mg \equiv G$$

c) Wegen Energieerhaltung erreicht die Person wieder die Absprunghöhe:

$$\Rightarrow \; s_{\min} = -l \; < \; s_{\max_2} \; < \; 0.$$[2]

d) Newton in s-Richtung

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = ma(s) = +mg - F_{\text{Feder}} \quad \Rightarrow \quad a(s) = g - \frac{c\,s}{m}\,, \quad 0 \leq s \leq s_{\max}$$



e) Mit $a(s) = v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ folgt durch Integration

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v^2(s=0)}{2} = \int_0^s a(s')\,\mathrm{d}s' = \int_0^s (g - \frac{c\,s'}{m})\,\mathrm{d}s' \quad \text{mit} \quad \frac{v^2(s=0)}{2} = g\,l$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\,(l+s) - \frac{c}{m}\,s^2}\,, \quad 0 \leq s \leq s_{\max}$$

(alternativ mit Energieerhaltung)

Der erste Anteil ist die Flugzeit im freien Fall, der zweite Anteil die Flugzeit für die durch die Federkraft gebremste Strecke bis zum Umkehrpunkt.

f) Mit $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ folgt durch Integration

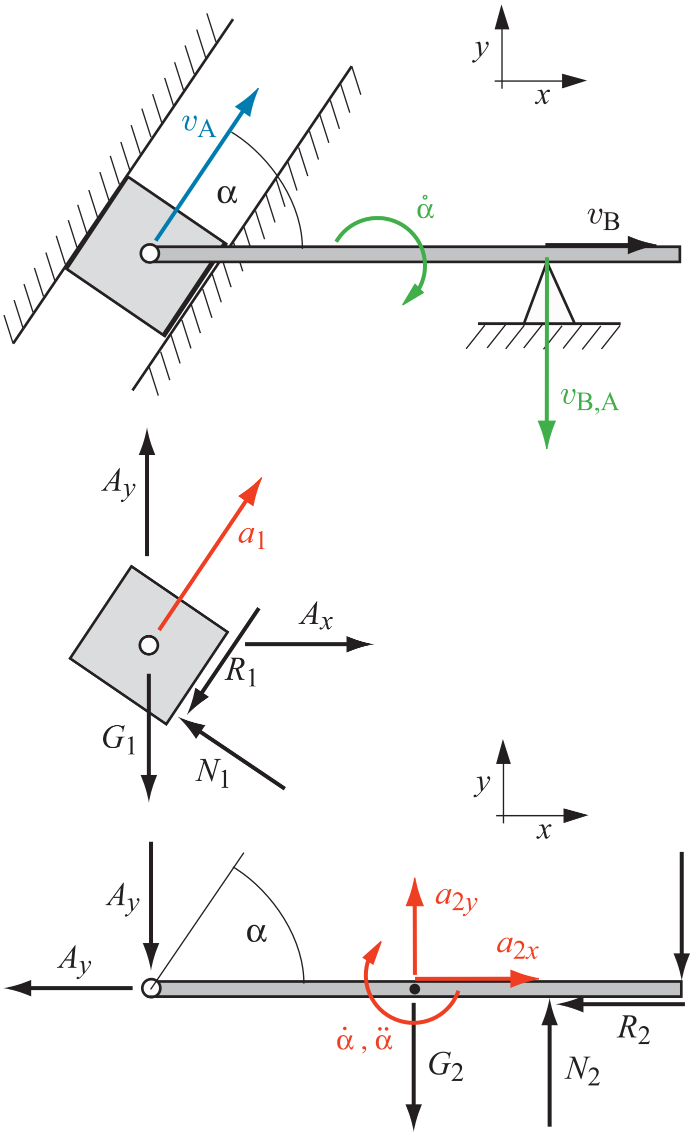
$$t = \int_0^l \frac{\mathrm{d}s'}{v(s')} + \int_0^{s_{\max}} \frac{\mathrm{d}s'}{v(s')} = \int_0^l \frac{\mathrm{d}s'}{\sqrt{2gs'}} + \int_0^{s_{\max}} \frac{\mathrm{d}s'}{\sqrt{2g\,(l+s') - \frac{c}{m}\,s'^2}}$$

---

[1] Der Wert $s = s_{\max_2} = \dfrac{mg}{c}\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{2\,c\,l}{mg}}\right) \; < \; 0$ ist bei einem schlaffen Seil sinnlos, da dieses sich nicht wie eine Feder für Werte $s < 0$ zusammendrücken lässt und dabei Energie speichert. Der Wert $s_{\max_2}$ wüde am <u>oberen</u> Umkehrpunkt der Bewegung auftauchen, wenn sich das Seil auch beim Zusammendrücken wie eine Feder verhalten und Energie speichern würde.

[2] Keine Speicherung von Federenergie im Seil für $s < 0$. Siehe dazu auch die Diskussion mit der Fußnote zu c).

Aufgabe D2 H15 (28 Punkte)



a) Euler:

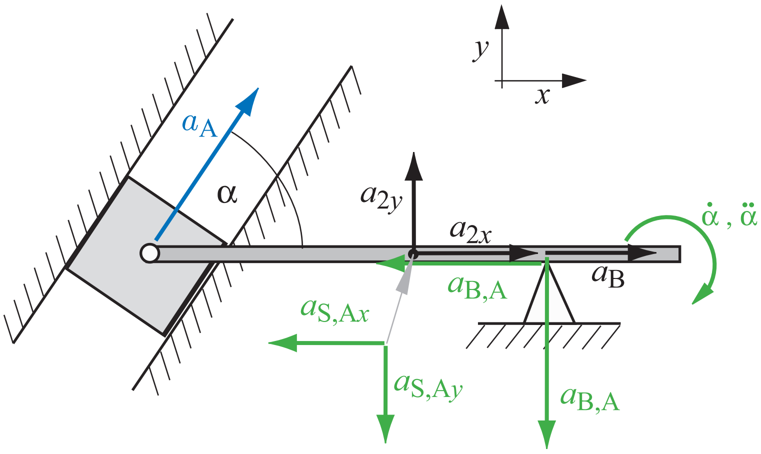
$$\vec{v}_{\mathrm{B}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{v}_{B,\mathrm{A}}$$

Auswertung in y-Richtung:

$$\left.\begin{aligned} v_{\mathrm{B},y} &= +v_{\mathrm{A}}\,\sin\alpha - v_{B,\mathrm{A}} \\ v_{\mathrm{B},y} &= 0 \\ v_{B,\mathrm{A}} &= +b\,\dot{\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{v_{\mathrm{A}}\,\sin\alpha}{b}$$

b) Beziehungen der Kinetik: Schwerpunkt- und Drallsätze, trockene Gleitreibung

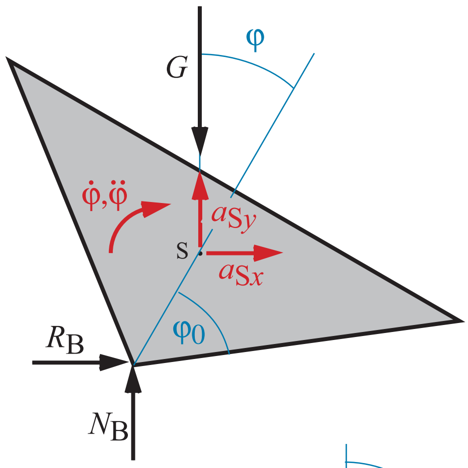
Gl.-Nr.				Unbek.	$\sum$
(1)	$m_1\,a_1$	$=$	$-m_1\,g\,\sin\alpha + A_x\,\cos\alpha + A_y\,\sin\alpha - R_1$	$a_1,\ A_x,\ A_y,\ R_1$	4
(2)	R_1	$=$	$\mu_{\mathrm{G}_1}\,N_1$	N_1	5
(3)	0	$=$	$-m_1\,g\,\cos\alpha - A_x\,\sin\alpha + A_y\,\cos\alpha + N_1$		
(4)	$m_2\,a_{2,x}$	$=$	$-A_x - R_2$	$a_{2,x},\ R_2$	7
(5)	R_2	$=$	$\mu_{\mathrm{G}_1}\,N_2$	N_2	8
(6)	$m_1\,a_{2,y}$	$=$	$-A_y + N_2 - F$	$a_{2,y},\ N_2$	9
(7)	$J_{\mathrm{S}_2}\ddot{\alpha}$	$=$	$-A_y\,l - N_2\,(b-l) + F\,l$	$\ddot{\alpha}$	10



Beziehungen der Kinematik: Euler

Gl.-Nr.						Unbek.	$\sum$
	$\vec a_2$	$=$	$\vec a_\mathrm{A}$	$+$	$\vec a_\mathrm{S,A}$		
(8)	$+a_{2,x}$	$=$	$+a_\mathrm{A}\ \cos\alpha$		$-l\,\dot\alpha^2$	$\dot\alpha^2$	11
(9)	$+a_{2,y}$	$=$	$+a_\mathrm{A}\ \sin\alpha$		$-l\,\ddot\alpha$		
	$\vec a_\mathrm{B}$	$=$	$\vec a_\mathrm{A}$	$+$	$\vec a_\mathrm{B,A}$		
(10)	0	$=$	$a_\mathrm{A}\ \sin\alpha$		$-b\,\ddot\alpha$		
	$\vec v_\mathrm{B}$	$=$	$\vec v_\mathrm{A}$	$+$	$\vec v_\mathrm{B,A}$		
(11)	0	$=$	$v_\mathrm{A}\ \sin\alpha$		$-b\,\dot\alpha$		

Aufgabe D3 H15 (16 Punkte)



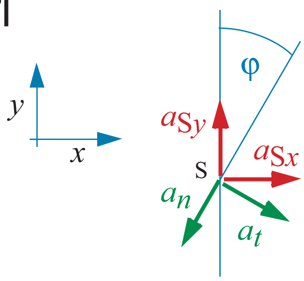
a) Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}\,J_{\mathrm{S}}\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot v_{\mathrm{S}}^2 + m\,g\,2s\,\cos\varphi = m\,g\,2s$$

oder

$$\frac{1}{2}\,J_{\mathrm{B}}\,\dot\varphi^2 + m\,g\,2s\,\cos\varphi = m\,g\,2s \text{ mit } J_{\mathrm{B}} = J_{\mathrm{S}} + m\,(2s)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \dot\varphi = \pm\sqrt{\frac{4\,m\,g\,s\,(1-\cos\varphi)}{J_{\mathrm{S}}+4ms^2}}$$



b) Drallsatz um den Berührpunkt B:

$$J_{\mathrm{B}}\,\ddot\varphi = m\,g\,2s\,\sin\varphi\,, \quad J_{\mathrm{B}} = J_{\mathrm{S}}{+}4ms^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot\varphi = \frac{2mgs\sin\varphi}{J_{\mathrm{B}}}$$

c) Reibkraft

$$\begin{aligned} m\,a_{\mathrm{S}_x} &= R_{\mathrm{B}} \\ a_{\mathrm{S}_x} &= a_t\cos\varphi - a_n\sin\varphi\,, \quad a_t = 2s\ddot\varphi\,,\ a_n = 2s\dot\varphi^2 \end{aligned}$$

$$R_{\mathrm{B}} = m\,\Big(\frac{4mgs^2\sin\varphi\cos\varphi}{J_{\mathrm{B}}} - \frac{8mgs^2(1-\cos\varphi)}{J_{\mathrm{B}}}\Big) = \frac{4ms^2}{J_{\mathrm{B}}}\,mg\,(3\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi)$$

Normalkraft

$$\begin{aligned} m\,a_{\mathrm{S}_y} &= N_{\mathrm{B}} - mg \\ a_{\mathrm{S}_y} &= -a_t\sin\varphi - a_n\cos\varphi\,, \quad (\text{s.o.: } a_t = 2s\ddot\varphi\,,\ a_n = 2s\dot\varphi^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{B}} &= mg - m2s\ddot\varphi\sin\varphi - 2s\dot\varphi^2\cos\varphi \\ &= mg\left(1 - \frac{4ms^2\sin^2\varphi}{J_{\mathrm{B}}} - \frac{8ms^2\cos\varphi\,(1-\cos\varphi)}{J_{\mathrm{B}}}\right) = mg\left(1 - \frac{4ms^2}{J_{\mathrm{B}}}\,(1+2\cos\varphi-3\cos^2\varphi)\right) \end{aligned}$$

d) Rutschbedingung

Aus $|R_{\mathrm{B}}| \geq \mu_H\,N_{\mathrm{B}}$ folgt:

$$\frac{4ms^2}{J_{\mathrm{B}}}\,(3\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi) \geq \mu_G\left(1 - \frac{4ms^2}{J_{\mathrm{B}}}\,(1+2\cos\varphi-3\cos^2\varphi)\right)$$