Musterlösung Mechanik II SS16

Aufgabe D1 H16 (12 Punkte)

a) Definition: $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

Pkw: $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}v}{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{a_0} \exp\left(\dfrac{v}{v_e} - \dfrac{1}{2}\right)$

Integration: $t = \dfrac{v_e}{a_0} \exp\left(\dfrac{v}{v_e} - \dfrac{1}{2}\right) + c_t$

Anfangsbedingungen: $t = 0: \quad v = \dfrac{v_e}{2} \quad \Rightarrow \quad c_t = -\dfrac{v_e}{a_0}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_e}{a_0} \left(\exp\left(\frac{v}{v_e} - \frac{1}{2}\right) - 1\right)$$

Daraus ergibt sich: $t_e = \dfrac{v_e}{a_0} \left(\sqrt{e} - 1\right)$

b) Lkw: $s_1(t) = v_1\, t + 5\, l$

Daraus ergibt sich: $s_1(t_e) = s_e = v_1\, t_e + 5\, l = \dfrac{v_1\, v_e}{a_0} \left(\sqrt{e} - 1\right) + 5\, l$

c) Mit den Anfangsbedingungen $s_1(t = 0) = 5\, l$, $s_2(t = 0) = 0$ soll folgende Bedingung gelten:

$$s_1(t_e) \leq s_2(t_e)$$

Definition: $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

Pkw: $\mathrm{d}s_2 = v\, \mathrm{d}t = v\, \dfrac{\mathrm{d}v}{a(v)} = \dfrac{v\, \mathrm{d}v}{a_0\, \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{v_e}\right)} = \dfrac{v}{a_0} \exp\left(\dfrac{v}{v_e} - \dfrac{1}{2}\right) \mathrm{d}v$

Integration: $s_2(v) = \dfrac{v_e^2}{a_0} \left(\dfrac{v}{v_e} - 1\right) \exp\left(\dfrac{v}{v_e} - \dfrac{1}{2}\right) + c_s$

Anfangsbedingungen: $\quad v(s_2 = 0) = \dfrac{v_e}{2} \quad \Rightarrow \quad c_s = \dfrac{v_e^2}{2\, a_0}$

$$\Rightarrow \quad s_2(v) = \frac{v_e^2}{2\, a_0} \left(1 + 2\left(\frac{v}{v_e} - 1\right) \exp\left(\frac{v}{v_e} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Aus der Bedingung folgt: $s_1(t_e) = \dfrac{v_1\, v_e}{a_0} \left(\sqrt{e} - 1\right) + 5\, l \leq s_2(v_e) = \dfrac{v_e^2}{2\, a_0}$

Ausrechnung liefert:

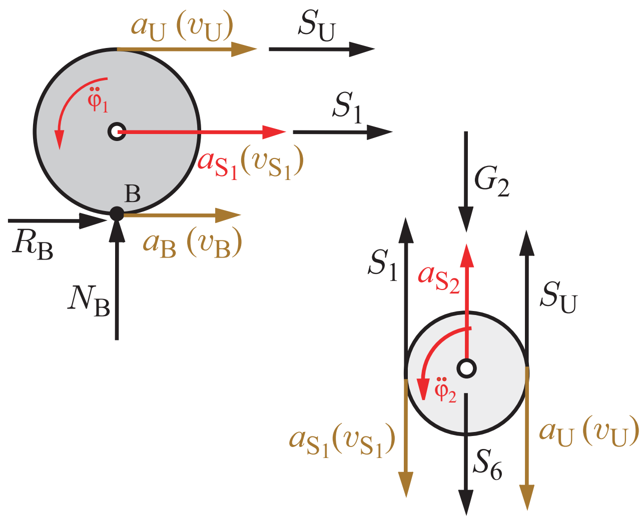
$$a_0 \leq \frac{v_e}{10\, l} \left(v_e - 2\, v_1 \left(\sqrt{e} - 1\right)\right) = a_{0,\max}$$ [1]

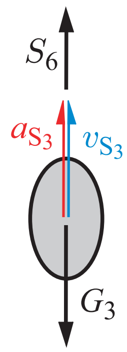
Damit dieser Ausdruck und damit $a(v)$ überhaupt positiv ist, muss ferner gelten:

$$v_e \geq 2\, v_1 \left(\sqrt{e} - 1\right) = v_{e,\min}$$

[1] Kleineres a_0 bedeutet, dass der Motor bei höherer Geschwindigkeit des Fahrzeugs oder höherer Motordrehzahl noch eine größere Beschleunigung $a(v)$ liefert (Turbolader).

Aufgabe D2 H16 (34 Punkte)





a) Kinematik mit Euler an Umlenkrolle 2:

$$\left.\begin{aligned} a_\mathrm{U} &= -2\,r_1\,\ddot\varphi_1 \\ a_{\mathrm{S}_1} &= -r_1\,\ddot\varphi_1 \\ -a_\mathrm{U} &= -a_{\mathrm{S}_1} + 2\,r_2\,\ddot\varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot\varphi_2 = \frac{r_1}{2\,r_2}\,\ddot\varphi_1$$

Geschwindigkeiten analog: $\Rightarrow \quad \dot\varphi_2 = \dfrac{r_1}{2\,r_2}\,\dot\varphi_1$

Für späteren Gebrauch:

$$v_3 = v_2 = -v_{\mathrm{S}_1} + r_2\,\dot\varphi_2 = r_1\,\dot\varphi_1 + r_2\,\dot\varphi_2 = \frac{3}{2}\,\dot\varphi_1$$

$$a_{\mathrm{S}_3} = a_{\mathrm{S}_2} = -a_{\mathrm{S}_1} + r_2\,\ddot\varphi_2 = r_1\,\ddot\varphi_1 + r_2\,\ddot\varphi_2 = \frac{3}{2}\,\ddot\varphi_1$$

b) Lt. Freischnitten

Gl.				Unbek.	$\sum$
(1)	$J_\mathrm{B}\,\ddot\varphi_1$	$=$	$-(S_1 + 2S_\mathrm{U})\,r_1$	$J_\mathrm{B},\ \ddot\varphi_1,\ S_1, S_\mathrm{U}$	4
(2)	J_B	$=$	$J_{\mathrm{S}_1} + m_1\,r_1^2$		
(3)	$J_{\mathrm{S}_2}\,\ddot\varphi_2$	$=$	$-(S_1 - S_\mathrm{U})\,r_2$	$\ddot\varphi_2$	5
(4)	$\ddot\varphi_2$	$=$	$\dfrac{r_1}{2\,r_2}\,\ddot\varphi_1$		
(5)	$m_2\,a_{\mathrm{S}_2}$	$=$	$S_1 + S_\mathrm{U} - S_6 - G_2$	$a_{\mathrm{S}_2},\ S_6$	7
(6)	$m_3\,a_{\mathrm{S}_3}$	$=$	$S_6 - G_3$	a_{S_3}	8
(7)	a_{S_3}	$=$	a_{S_2}		
(8)	a_{S_2}	$=$	$\dfrac{3}{2}\,\ddot\varphi_1$		

c) Haftreibung: $|\vec R_\mathrm{B}| \le \mu_\mathrm{H}\,N_\mathrm{B}$ mit $N_\mathrm{B} = m_1\,g$

$$-R_\mathrm{B} = \frac{J_{\mathrm{S}_1}\,\ddot\varphi_1}{r_1} + S_\mathrm{U} > 0\,, \quad -R_\mathrm{B} \le \mu_\mathrm{H}\,m_1\,g \quad \Rightarrow \quad \mu_\mathrm{H,erf} = \frac{-R_\mathrm{B}}{m_1\,g}$$

d)[2] Energieerhaltung von I nach II

$$\frac{1}{2}\,J_\mathrm{B}\,\dot\varphi_{1,\mathrm{II}}^2 + \frac{1}{2}\,J_{\mathrm{S}_2}\,\dot\varphi_{2,\mathrm{II}}^2 + \frac{1}{2}\,(m_2 + m_3)\,v_{2,\mathrm{II}}^2 + (m_2 + m_3)\,g\,\Delta h_{3,\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = 0$$

mit

$$\Delta h_{3,\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}\,(r_1\,\Delta\varphi_1 + 2\,r_1\,\Delta\varphi_1) = -\frac{3}{2}\,r_1\,2\pi = -3\,\pi\,r_1$$

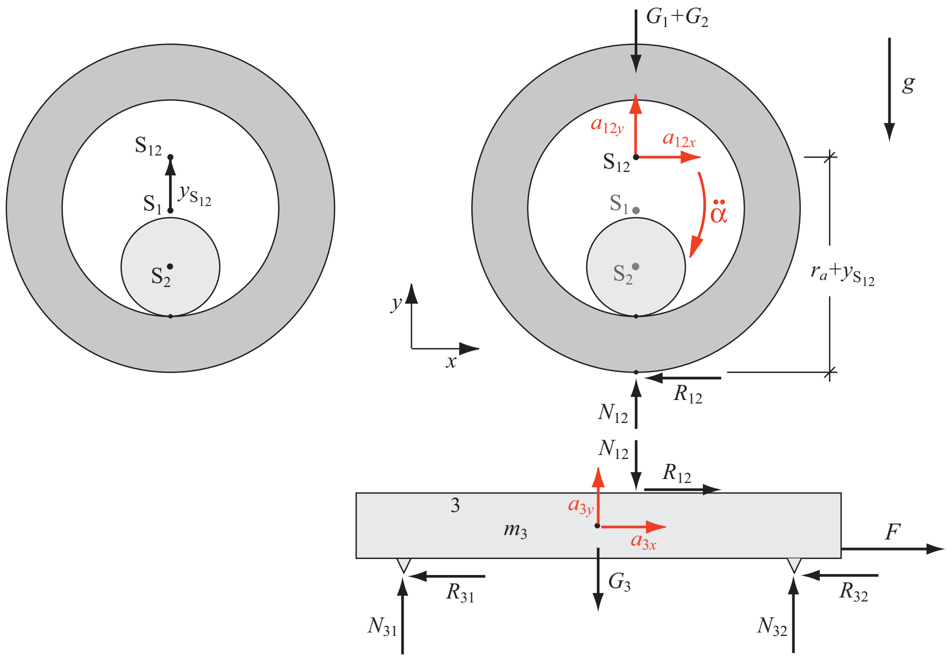
$$\dot\varphi_{1,\mathrm{II}} = -\frac{\sqrt{2\,a_{\mathrm{S}_1}\,2\pi\,r_1}}{r_1}\,, \qquad \dot\varphi_{2,\mathrm{II}} = \frac{r_1}{2\,r_2}\,\dot\varphi_{1,\mathrm{II}}$$

Ferner: $\quad v_{\mathrm{S}_3} = v_{\mathrm{S}_2} = -v_{\mathrm{S}_1} + r_2\,\dot\varphi_2 = r_1\,\dot\varphi_1 + r_2\,\dot\varphi_2$

[2] Alternativ: Mit $a_{\mathrm{S}_3} = const$ folgt: $v_{\mathrm{S}_3} = a_{\mathrm{S}_3}\,t_\mathrm{II}$ mit t_II aus $\Delta s_3 = -\Delta h_{3,\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}\,a_{\mathrm{S}_3}\,t_\mathrm{II}^2$.

Aufgabe D3 H16 (32 Punkte)

a) Freischnitte:[3]



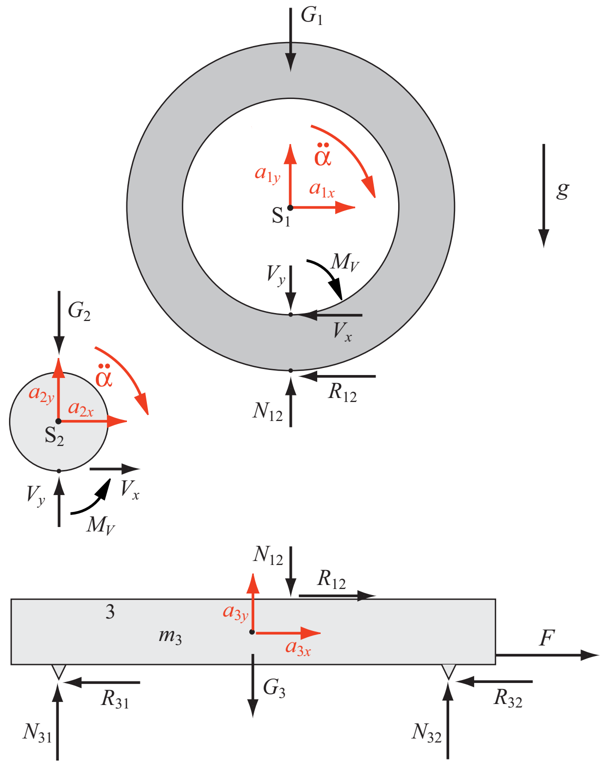
Gleichungen:

Gl.		Unbek.	$\sum$
(1)	$J_{S_{12}}\,\ddot{\alpha} = +R_{12}\,(r_a + y_{S_{12}})$	$J_{S_{12}},\ \ddot{\alpha},\ R_{12},\ y_{S_{12}}$	4
(2)	$(m_1+m_2)\,y_{S_{12}} = -m_2\,(r_i - r_2)$		
(3)	$J_{S_{12}} = J_{S_1} + m_1\,y_{S_{12}}^2 + J_{S_2} + m_2\,(r_i - r_2 + y_{S_{12}})^2$		
(4)	$(m_1+m_2)\,a_{12x} = -R_{12}$	a_{12x}	5
(5)	$m_3\,a_{3x} = +R_{12} - (R_{31}+R_{32}) + F$	$R_{31},\ R_{32}$	7
(6)	$R_{31} = +\mu_{G_3}\,N_{31}$	N_{31}	8
(7)	$R_{32} = +\mu_{G_3}\,N_{32}$	N_{32}	9
(8)	$m_3\,a_{3y} = +(N_{31}+N_{32}) - N_{12} - G_3$	$a_{3y},\ N_{12}$	11
(9)	$a_{3y} = 0$		
(10)	$(m_1+m_2)\,a_{12y} = +N_{12} - (G_1+G_2)$	a_{12y}	12
(11)	$a_{12y} = +a_{3y} - (r_a + y_{S_{12}})\,\dot{\alpha}^2 = 0$		
(12)	$a_{12x} = +a_{3x} + (r_a + y_{S_{12}})\,\ddot{\alpha}$		

[3] Die Lage des Schwerpunts S_{12} ist oberhalb S_1 angenommen, um die Zeichnung übersichtlich zu halten. Damit ist klar, dass die Ausrechnung für $y_{S_{12}}$ Gl. (2) einen negativen Wert ergeben muss.

a) Alternative:

Freischnitte aller drei Körper



Gleichungen:

Gl.				Unbek.	$\sum$
(1_{A})	$J_{S_1}\,\ddot{\alpha}$	$=$	$+R_{12}\,r_a + V_x\,r_i + M_V$	$\ddot{\alpha},\ R_{12},\ V_x,\ M_V$	4
(2_{A})	$m_1\,a_{1x}$	$=$	$-V_x - R_{12}$	a_{1x}	5
(3_{A})	$J_{S_2}\,\ddot{\alpha}$	$=$	$-V_x\,r_2 - M_V$		
(4_{A})	$m_2\,a_{2x}$	$=$	$+V_x$	a_{2x}	6
(5_{A})	a_{1x}	$=$	$a_{3x} + r_a\,\ddot{\alpha}$	a_{3x}	7
(6_{A})	a_{2x}	$=$	$a_{3x} + (r_a - r_i + r_2)\,\ddot{\alpha}$		
(7_{A})	$m_3\,a_{3x}$	$=$	$+R_{12} - (R_{31} + R_{32}) + F$	$R_{31} + R_{32}$	8
(8_{A})	$R_{31} + R_{32}$	$=$	$+\mu_{G_3}\,(N_{31} + N_{32})$	$N_{31} + N_{32}$	9
(9_{A})	$m_3\,a_{3y}$	$=$	$+(N_{31} + N_{32}) - N_{12} - G_3$	$a_{3y},\ N_{12}$	11
(10_{A})	a_{3y}	$=$	0		
(11_{A})	$m_1\,a_{1y}$	$=$	$-V_y - G_1 + N_{12}$	$a_{1y},\ V_y$	13
(12_{A})	$m_2\,a_{2y}$	$=$	$+V_y - G_2$	a_{2y}	14
(13_{A})	a_{1y}	$=$	0		
(14_{A})	a_{2y}	$=$	$a_{ey} - r_2\,\dot{\varphi}^2 = 0$		

b) Solange am Körper 12 Haftreibung vorliegt, gilt:

$$|R_{12}| \leq \mu_{\mathrm{H}_1} N_{12} \quad \Rightarrow \quad \mu_{\mathrm{H}_1} \geq \frac{|R_{12}|}{N_{12}} = \mu_{\mathrm{H}_1,\mathrm{erf}} \text{ mit } R_{12} \text{ aus a)}$$

c) Der Körper 12 wird in diesem Fall stets Rutschen. Im vorstehenden Gleichungssystem gilt deshalb für R_{12}:

$$R_{12} < 0 \quad \text{und} \quad |R_{12}| = \mu_{\mathrm{G}_1} N_{12}$$

Mit $N_{12} = G_1 + G_2$ folgt

$$-R_{12} = \mu_{\mathrm{G}_1} \, (G_1 + G_2) \ .$$

Gl. (4) gilt weiterhin. Damit wird

$$(m_1 + m_2) \, a_{12x} = -R_{12} = \mu_{\mathrm{G}_1} \, (m_1 + m_2) \, g$$

und es folgt

$$a_{12x} = \mu_{\mathrm{G}_1} \, g \, .$$

Gl. (5) gilt weiterhin. Daraus folgt

$$a_{3x} = -g \left(\mu_{\mathrm{G}_1} \frac{m_1 + m_2}{m_3} + \mu_{\mathrm{G}_3} \left(1 + \frac{m_1 + m_2}{m_3} \right) \right) + \frac{F}{m_3} \, .$$

d) Die Gleichungen aus c) gelten nur falls $a_{3x} > 0$.

Daraus folgt:

$$F > g \Big(\mu_{\mathrm{G}_1} \, (m_1 + m_2) + \mu_{\mathrm{G}_3} \, (m_1 + m_2 + m_3) \Big) = F_{\min}$$