Aufgabe D1 H11

Nachdem seine Maschinen gestoppt werden, verringert ein Containerschiff seine anfängliche Geschwindigkeit v_0 alleine durch Reibung im Wasser. Für die Beschleunigung a soll angenommen werden, dass diese im Zeitintervall $0 \leq t \leq 2\tau$ dem Quadrat der Geschwindigkeit v des Frachters proportional ist.

Geg.: $a = -c_w v^2$, $c_w = const, c_w > 0$, v_0 , τ

Ges.:

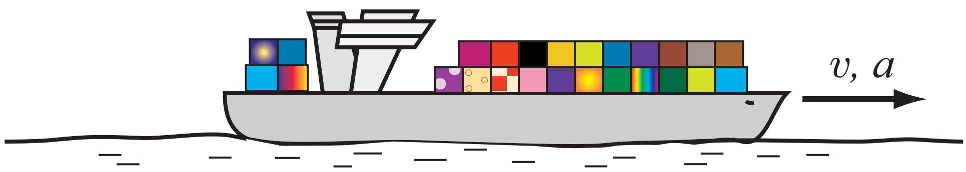
a) Bestimmen Sie die Konstante c_w, wenn sich die Geschwindigkeit des Frachters nach der Zeit τ vom Anfangswert v_0 auf dessen Hälfte verringert hat!

Bestimmen Sie für den Zeitpunkt $t = 2\tau$

b) das Geschwindigkeitsverhältnis $v_{2\tau}/v_0$,

c) den Weg $s_{2\tau}$, den der Frachter nach der Zeit 2τ zurückgelegt hat!

Hinweis: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + const$

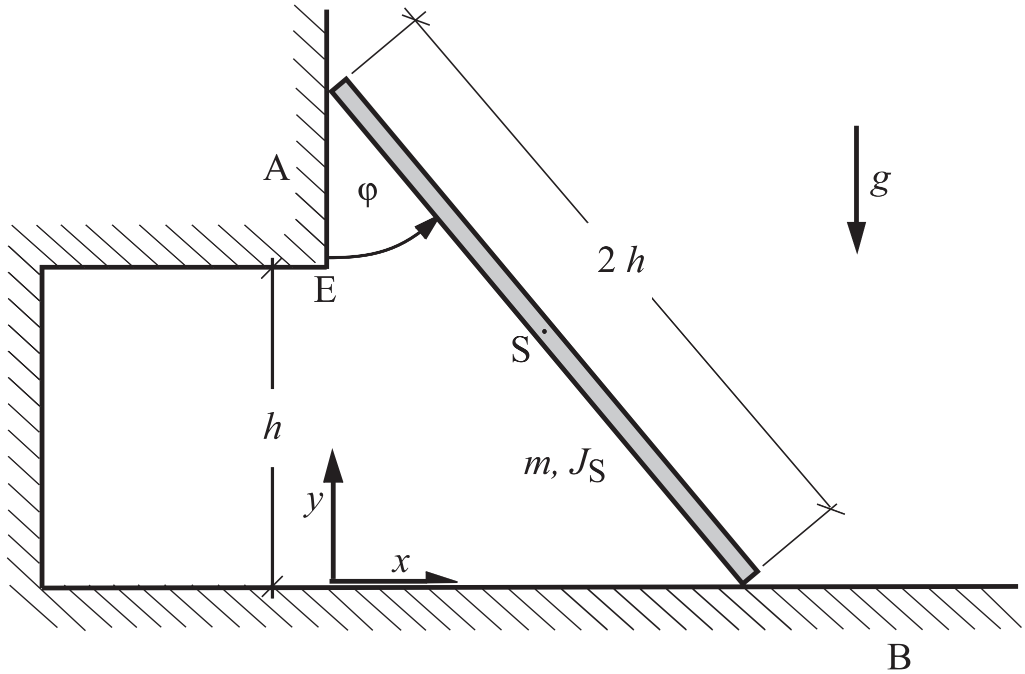


Aufgabe D2 H11

Ein Stab bewegt sich aus der senkrechten Ruhelage bei $\varphi = 0$ unter dem Einfluss seines Gewichtes in die horizontale Position. Der Vorgang zerfällt in zwei Abschnitte. Phase I bis zum Erreichen der Ecke E wird der Stab von der Wand A und der Unterlage B geführt, danach in der Phase II wird er nur von der Unterlage geführt. Bei Erreichen der horizontalen Lage stößt der Stab <u>ohne</u> Rückfedern gegen die Unterlage (Phase III) und rutscht danach parallel zur Unterlage in eine Endposition (Phase IV).

Annahmen: In den Phasen I und II soll Reibung mit den Wänden bei A und B vernachlässigt werden. In der Phase IV soll zwischen Stab und Unterlage Reibung mit Gleitreibungskoeffizient μ auftreten. Der Stab besitze eine homogene Massenverteilung und seine Dicke sei gegenüber seiner Länge $2h$ vernachlässigbar.

Geg.: m, J_S, h, μ, $\vec{g}$



Ges.: Bestimmen Sie

a) die Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Winkels φ in der Phase I: $0 \leq \varphi \leq \varphi_\mathrm{E}$,

b) die Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Winkels φ in der Phase II: $\varphi_\mathrm{E} \leq \varphi \leq \pi/2$,

c) die Auflagerreaktionen bei A und B als Funktion des Winkels φ für Phase I und II (Angabe des Gleichungssystems reicht!),

d) den Verlust mechanischer Energie beim Stoß, Phase III,

e) die Strecke x_R, die der Stab in Phase IV zurücklegt, bis er wieder zur Ruhe kommt,

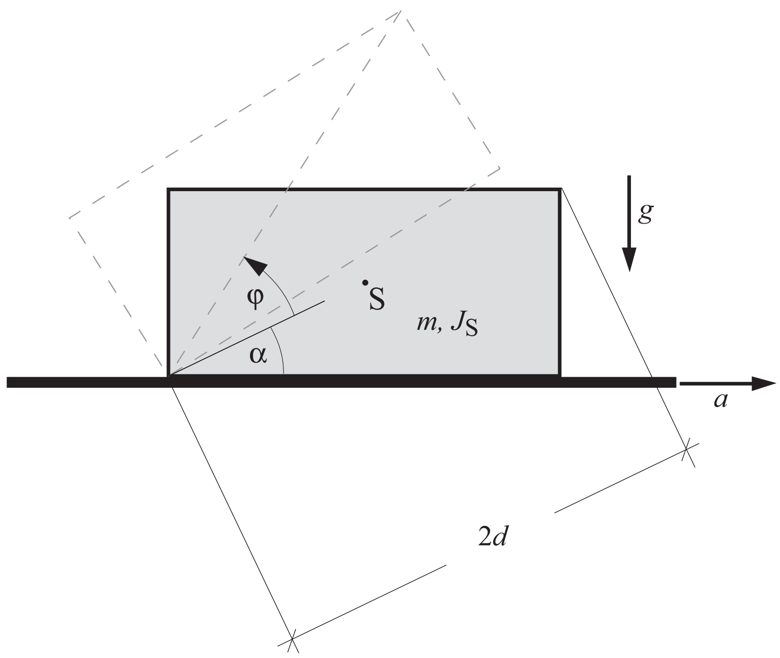
f) den Verlust mechanischer Energie in Phase IV und den Verlust an mechanischer Energie insgesamt!

Aufgabe D3 H11

Ein Quader mit Masse m und Trägheitsmoment J_S soll auf einem Fließband bewegt werden. Nach Betriebsstörungen (Stillstand des Bandes) soll das Fließband wieder möglichst schnell auf Arbeitsgeschwindigkeit beschleunigen.

Annahmen: Der Quader hat eine homogene Massenverteilung.

Geg.: $m\,,\ J_S\,,\ d\,,\ \alpha\,,\ \vec{g}$



Ges.:

Für den Fall konstanter Beschleunigung des Fließbandes und dass der Quader nicht rutscht,

a) die Grenzbeschleunigung $\vec{a} = \vec{a}_g$ des Fleißbandes, so dass der Quader gerade nicht in Rotation gerät,

b) den bei der Grenzbeschleunigung $\vec{a} = \vec{a}_g$ notwendigen Haftreibungskoeffizienten zwischen Quader und Fließband,

Für den Fall konstanter Beschleunigung $|\vec{a}| > |\vec{a}_g|$ des Fließbandes und dass der Quader nicht rutscht,

c) die Winkelbeschleunigung $\ddot{\vec{\varphi}}$ des Quaders als Funktion des Winkels $0 < \varphi < \pi/2 - \alpha$,

d) die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vec{\varphi}}$ des Quaders als Funktion des Winkels $0 < \varphi < \pi/2 - \alpha$!

Musterlösung Mechanik II SS11

Aufgabe D1 H11

a) Definition: $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -c_w\, v^2$

Trennung der Variablen: $\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2} = -c_w\,\mathrm{d}t$ Integration: $-\dfrac{1}{v} = -c_w\, t + C_1$

Integrationskonstante aus Anfangsbedingungen : $t = 0: \quad v = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\dfrac{1}{v_0}$

Lösung allgemein: $t = \dfrac{1}{v_0 c_w}(\dfrac{v_0}{v} - 1) \quad \Rightarrow$ Zeit $t = \tau$ für $v = 1/2\, v_0$: $\tau = \dfrac{1}{c_w v_0}$

b) Geschwindigkeit bei $t = 2\tau$: Nach Einsetzen in Lösung aus a) folgt: $\dfrac{v}{v_0} = \dfrac{1}{3}$

c) Aus Definition: $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -c_w\, v^2$

Trennung der Variablen: $\mathrm{d}s = -\dfrac{1}{c_w}\dfrac{\mathrm{d}v}{v}$ Integration: $s = -\dfrac{1}{c_w}\ln|\dfrac{v}{C_2}|$

Integrationskonstante aus Anfangsbedingungen : $s = 0: \quad v = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = v_0$

Lösung allgemein: $s = -\dfrac{1}{c_w}\ln|\dfrac{v}{v_0}| \quad \Rightarrow$ Ort s für $v = v_0/3$: $s = \dfrac{\ln 3}{c_w}$

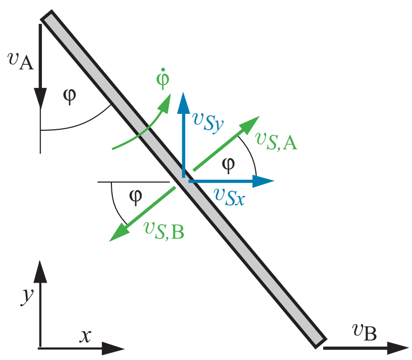
Aufgabe D2 H11

a) Energieerhaltung Phase I

$mgh = mgh\cos\varphi_{\rm I} + 1/2\, m\, v_{\rm S}^2 + 1/2\, J_{\rm S}\, \dot\varphi_{\rm I}^2 \quad$ mit $\quad v_{\rm S}^2 = v_{{\rm S}x}^2 + v_{{\rm S}y}^2$

Euler:

$$\left.\begin{aligned} v_{{\rm S}x} &= \overset{0}{\cancel{v_{\rm Ax}}} + h\,\dot\varphi_{\rm I}\,\cos\varphi_{\rm I} = +h\,\dot\varphi_{\rm I}\,\cos\varphi_{\rm I} \\ v_{{\rm S}y} &= \overset{0}{\cancel{v_{\rm By}}} - h\,\dot\varphi_{\rm I}\,\sin\varphi_{\rm I} = -h\,\dot\varphi_{\rm I}\,\sin\varphi_{\rm I} \end{aligned}\right\} v_S^2 = h^2\,\dot\varphi_{\rm I}^2$$



$$\Rightarrow \quad \dot\varphi_{\rm I} = \sqrt{\frac{2mgh\,(1 - \cos\varphi_{\rm I})}{J_{\rm S} + mh^2}}\,, \quad 0 \le \quad \le \varphi_E = \arccos 1/2$$

b) Energieerhaltung Phase II

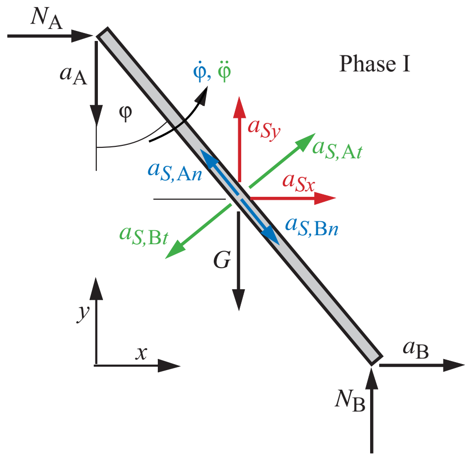
$$mgh = mgh\cos\varphi_{\rm II} + 1/2\, m\,(v_{{\rm S}x}^2 + v_{{\rm S}y}^2) + 1/2\, J_S\,\dot\varphi_{\rm II}^2$$

$$v_{{\rm S}x} = const = h\,\dot\varphi_{\rm E}\,\cos\varphi_{\rm E} = h\,\tfrac{1}{2}\sqrt{mgh/(J_{\rm S} + mh^2)}\,, \quad v_{{\rm S}y} = -h\,\dot\varphi_{\rm II}\,\sin\varphi_{\rm II}$$

$$\Rightarrow \quad \dot\varphi_{\rm II} = \sqrt{\frac{2mgh\,(1 - \cos\varphi_{\rm II}) - m\,h^2\dot\varphi_{\rm E}^2\cos^2\varphi_E}{J_{\rm S} + mh^2\sin\varphi_{\rm II}^2}}\,, \quad \varphi_E = \arccos 1/2 \le \varphi_{\rm II} \le \pi/2$$

c)

Gleichungssystem Phase I:



(1) $\quad J_S\,\ddot\varphi_{\mathrm{I}} = \Big(-N_{\mathrm{A}}\cos\varphi_{\mathrm{I}} + N_{\mathrm{B}}\sin\varphi_{\mathrm{I}}\Big)\,h$

(2) $\quad m\,a_{Sx} = N_{\mathrm{A}}$

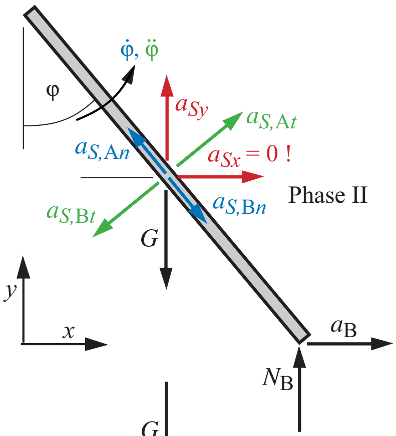
(3) $\quad m\,a_{Sy} = N_{\mathrm{B}} - mg$

(4) $\quad a_{Sx} = a_{S,\mathrm{A}x} = h\,\Big(+\ddot\varphi_{\mathrm{I}}\cos\varphi_{\mathrm{I}} - \dot\varphi_{\mathrm{I}}^2\,\mathrm{si}$

(5) $\quad a_{Sy} = a_{S,\mathrm{B}y} = h\,\Big(-\ddot\varphi_{\mathrm{I}}\sin\varphi_{\mathrm{I}} - \dot\varphi_{\mathrm{I}}^2\cos\varphi_{\mathrm{I}}\Big)$

Unbekannte: $\quad \ddot\varphi_{\mathrm{I}}\,,\ N_{\mathrm{A}}\,,\ N_{\mathrm{B}}\,,\ a_{Sx}\,,\ a_{Sy}$

Gleichungssystem Phase II:



(1) $\quad J_S\,\ddot\varphi_{\mathrm{II}} = h\,N_{\mathrm{B}}\sin\varphi_{\mathrm{II}}$

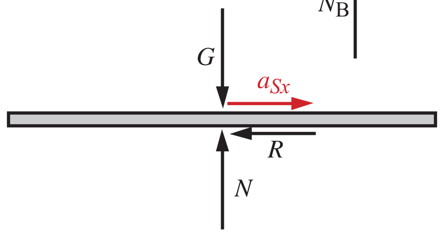
(–) $\quad m\,a_{Sx} = N_{\mathrm{A}} = 0$

(2) $\quad m\,a_{Sy} = N_{\mathrm{B}} - mg$

(3) $\quad a_{Sy} = h\,\Big(-\ddot\varphi_{\mathrm{II}}\sin\varphi_{\mathrm{II}} - \dot\varphi_{\mathrm{II}}^2\cos\varphi_{\mathrm{II}}\Big)$

Unbekannte: $\quad \ddot\varphi_{\mathrm{II}}\,,\ N_{\mathrm{B}}\,,\ a_{Sy}$

d) Energieverlust Phase III:



$$\Delta E_{V_{\mathrm{III}}} = mgh - 1/2\,m\,v_{Sx}^2(\varphi_E)$$

e) Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

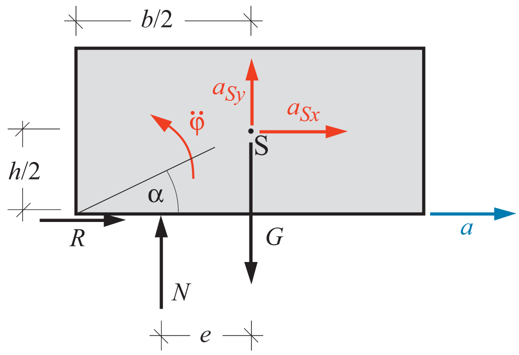
$$m\,a_{Sx} = -R_{\mathrm{B}} = -\mu\,mg \quad\Rightarrow\quad x_R = v_{Sx}^2(\varphi_E)/(2\,\mu\,g)$$

f) Energieverlust Phase IV und Gesamtenergieverlust: $\quad \Delta E_{V_{\mathrm{IV}}} = 1/2\,m\,v_{Sx}^2(\varphi_E)\,,\quad E_V = mgh$

Aufgabe D3 H11

a) Falls keine Rotation in Gang kommt, gilt:

$$\ddot{\varphi} = 0\,, \; a_{Sy} = 0 \quad \rightarrow \quad a_{Sx} = a$$



Schwerpunktsatz in x-Richtung:

$$m\,a_{Sx} = R\,, \quad a_{Sx} = a \quad \Rightarrow \quad R = m\,a$$

Schwerpunktsatz in y-Richtung:

$$m\,a_{Sy} = 0 = N - G \quad \Rightarrow \quad N = G$$

Drallsatz um Schwerpunkt:

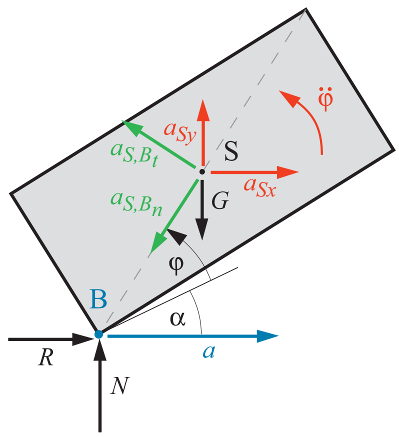
$$J_s\,\ddot{\varphi} = 0 = -N\,e + R\,\frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad N\,e = m\,a\,\frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{G\,e}{m\,h/2} = g\,\frac{2\,e}{h}$$

Maximalwert der Beschleunigung falls $e = e_{\max} = b/2$:

$$a_{\max} = a_g = g\,\frac{b}{h} = g\,\cot\alpha$$

b) Haftreibung: $\quad R \le \mu_{\mathrm{H}}\,N \quad \Rightarrow \quad \mu_{\mathrm{H}} \ge \dfrac{R}{N} = \dfrac{a_g}{g} = \cot\alpha$

c) Falls $a > a_g$:



Drallsatz um Schwerpunkt:

$$J_s\,\ddot{\varphi} = R\,\sin(\varphi+\alpha) - N\,\cos(\varphi+\alpha)$$

Schwerpunktsatz in x und y-Richtung:

$$\begin{aligned} m\,a_{Sx} &= R \\ m\,a_{Sy} &= N - G \end{aligned}$$

Euler:

$$\left.\begin{aligned} a_{Sx} &= \overset{a}{\cancel{a_{Bx}}} - a_{S,B_t}\,\sin(\varphi+\alpha) - a_{S,B_n}\,\cos(\varphi+\alpha) \\ a_{Sy} &= \overset{0}{\cancel{a_{By}}} + a_{S,B_t}\,\cos(\varphi+\alpha) - a_{S,B_n}\,\sin(\varphi+\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad a_{S,B_t} = d\,\ddot{\varphi}\,, \; a_{S,B_n} = d\,\dot{\varphi}^2$$

Einsetzen in Drallsatz:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad J_S\,\ddot{\varphi} &= m\,d\,\sin(\varphi+\alpha)\Big(a - d\ddot{\varphi}\,\sin(\varphi+\alpha) - d\dot{\varphi}^2\,\cos(\varphi+\alpha)\Big) + \\ &\quad -m\,d\,\cos(\varphi+\alpha)\Big(g + d\ddot{\varphi}\,\cos(\varphi+\alpha) - d\dot{\varphi}^2\,\sin(\varphi+\alpha)\Big) \\ &= m\,d\Big(a\,\sin(\varphi+\alpha) - g\,\cos(\varphi+\alpha)\Big) - m\,d^2\,\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \Big(J_S + md^2\Big)\,\ddot{\varphi} = md\Big(a\,\sin(\varphi+\alpha) - g\,\cos(\varphi+\alpha)\Big)$$

oder

$$\ddot{\varphi} = \frac{m\,d}{J_S + m\,d^2}\,(a - a_g)\,\sin(\varphi + \alpha)$$

Die Winkelbeschleunigung wächst mit wachsendem α. Daher beim Einkaufen Glasflaschen besser aufs Transportband der Kasse legen statt stellen.

d) Zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit kann die vorstehenden Gleichung mit $\dot{\varphi}$ erweitert werden. Dies liefert

$$\ddot{\varphi}\,\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\varphi}^2 = \frac{m\,d}{J_S + m\,d^2}\,(a - a_g)\,\sin(\varphi + \alpha)\,\dot{\varphi} = -\frac{m\,d}{J_S + m\,d^2}\,(a - a_g)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\varphi + \alpha).$$

Die unbestimmte zeitliche Integration ergibt dann

$$\frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 = -\frac{m\,d}{J_S + m\,d^2}\,(a - a_g)\,\cos(\varphi + \alpha) + C_0.$$

Die Konstante wird aus den Anfangsbedingung bestimmt:

$$\dot{\varphi}(\varphi = 0) = 0 : \quad C_0 = \frac{m\,d}{J_S + m\,d^2}\,(a - a_g)\,\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2\,m\,d}{J_S + m\,d^2}\,(a - a_g)\,\Big(\cos\alpha - \cos(\varphi + \alpha)\Big)} \;>\; 0 \quad \text{für alle} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Solange das Fließband beschleunigt wächst die Geschwindigkeit mit wachsendem Winkel φ.