Simulationstechnik V

Vorlesung/Praktikum an der RWTH Aachen

Numerische Simulation von Strömungsvorgängen

B. Binninger

Institut für Technische Verbrennung

Templergraben 64

6. Teil

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes

In unserer Konvektions-Diffusions-Modellgleichung hatten wir das Geschwindigkeitsfeld als gegeben vorausgesetzt.

Es fehlt: Transportgleichung für das Geschwindigkeitsfeld

Zur Verfügung steht die Impulsbilanz für inkompressible Strömungen und begleitend die Massenbilanz.

Die Impulsgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten haben die gleiche Struktur wie die Transportgleichung von skalaren Größen.

Wir werden also einige Ideen von vorher übernehmen, müssen aber besondere Schwierigkeiten berücksichtigen.

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Zunächst bemerkt man, dass die Transportgleichung nichtlinear wird. Beispielsweise die Impulsgleichung für die *x*-Komponente der Geschwindigkeit einer zweidimensionalen Strömung:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u u - \eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \rho v u - \eta \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ein nichtlinearer Term ist beispielsweise: $$\frac{\partial(\rho u\, u)}{\partial x} = \frac{\partial\Big((\rho u)\, u\Big)}{\partial x}$$

Idee zur Problemlösung:

Linearisierung der nichtlinearen Terme, indem die Massenflussdichte ρu zeitlich entwickelt wird (ν Zeitschrittzähler):

$$(\rho u)^{\nu+1}\, u^{\nu+1} \approx (\rho u)^{\nu}\, u^{\nu+1}$$

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Als nächstes fällt der unbekannte Druck oder Druckgradient in der Impulsgleichung auf:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u u - \eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \rho v u - \eta \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Hier liegt auch die eigentliche Schwierigkeit.

Als weitere Gleichung steht nur die Massenbilanz (Kontinuitätsgleichung) zur Verfügung, in der der Druck allerdings nicht direkt vorkommt.

Der Zusammenhang ist folgender:

Wird der korrekte Druck in die Impulsgleichung eingesetzt, dann bildet sich ein Geschwindigkeitsfeld heraus, welches die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt.

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Bemerkung:

Alternativer Ansatz (insbesondere in zwei Dimensionen)

Eine denkbare Möglichkeit ist es, den Druck aus den Gleichungen zu eliminieren.

Bildet man die Rotation der Impulsgleichung, kann der Druckgradienten eliminiert werden und man erhält eine Gleichung für den Wirbelvektor.

$\Rightarrow$ Wirbeltransportgleichung.

Ferner: Die Definition eines Vektorpotentials - in zwei Dimensionen die Stromfunktion - erfüllt die Kontinuitätsgleichung. Mit der Definition des Wirbelvektors erhalten wir eine Gleichung für das Vektorpotential.

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Zielsetzung eines direkten Verfahrens:

Die indirekte Information der Kontinuitäts-Gleichung hinsichtlich des Druckfeldes soll so umformuliert werden, dass sich ein direkter Algorithmus zur Bestimmung des Druckfeld ergibt.

Wir wollen uns der numerischen Integration der Impulsgleichung in zwei Schritten nähern.

1. vorgegebenes Druckfeld: Druckgradient als bekannter Quellterm

2. Kopplung Impulsgleichung Kontinuitätsgleichung zur Bestimmung des passenden Druckfeldes

1. Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes bei vorgegebenem Druck

Wir betrachten zunächst die eindimensionale Impulsgleichung

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{mit} \quad \phi_x = \rho u u - \eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

Darin taucht der Druckgradienten in *x*-Richtung auf.

Wir betrachten den Druck also zunächst als gegeben. Er übernimmt in der Transportgleichung die Rolle eines bekannten Quellterms.

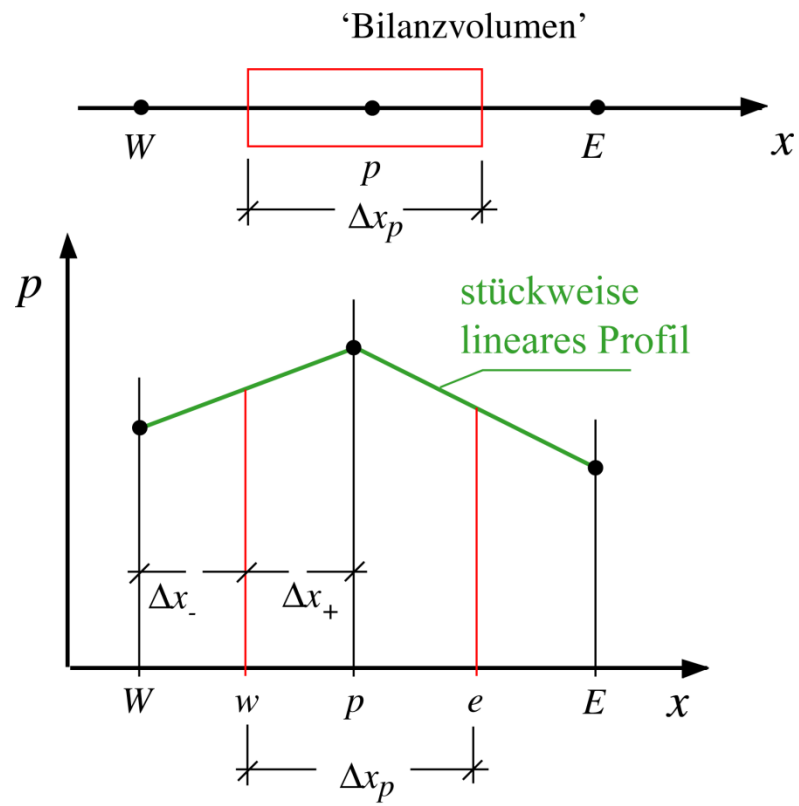
1. Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes bei vorgegebenem Druck (Forts.)

Diskretisierung des Druckgradienten

Falls die Zellflächen mittig zwischen den Gitterpunkten liegen, ergibt sich:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\frac{p_W + p_p}{2} - \frac{p_p + p_E}{2}}{\Delta x_p} = \frac{p_W - p_E}{2\Delta x_p}$$

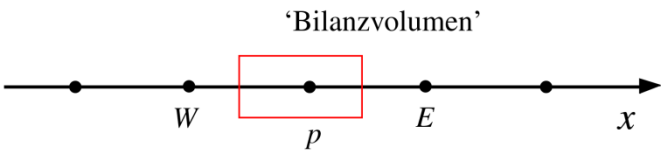
Damit enthält die Impulsgleichung die Druckwerte nicht an benachbarten Gitterpunkten, sondern von weiter auseinander liegenden.



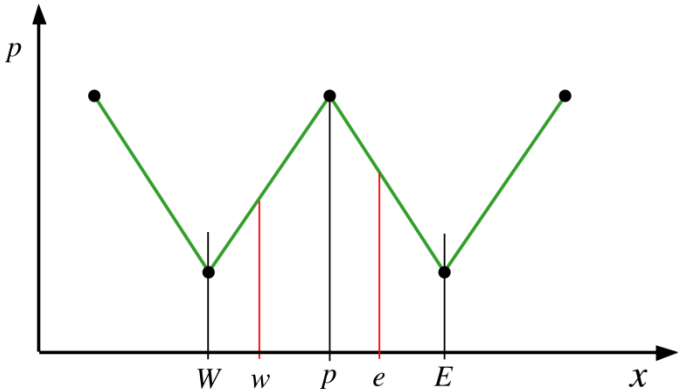
Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Der Druck wird sozusagen auf einem gröberen Gitter bestimmt.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} == \frac{p_W - p_E}{2\Delta x_p}$$



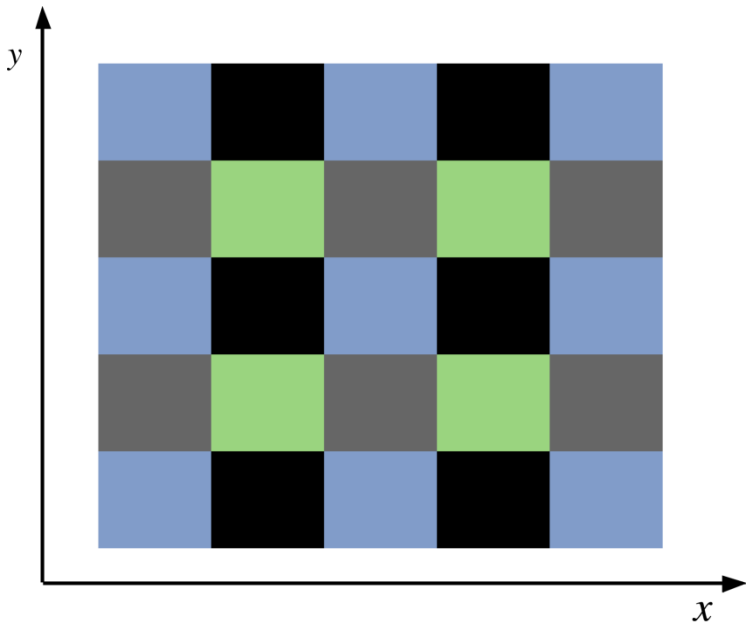
Aber schwerwiegender: Die Druckwerte von benachbarten Gitterpunkten entkoppeln.



Damit sind die Gradienten in der dargestellten Zick-Zack-Verteilung des Druckes für die diskrete Bilanz nicht sichtbar und hätten keine Auswirkung auf das numerisch berechnete Geschwindigkeitsfeld.

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Für mehrdimensionale Probleme sind vielfältige schachbrettartige Druckverteilungen, wie im Bild angedeutet, möglich, ohne dass dadurch ein Geschwindigkeitsfeld angeregt würde.



Solche Lösungen sind zwangsweise unphysikalisch und nicht als gute Lösung der Differentialgleichung akzeptierbar.

1. Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes bei vorg. Druck (Forts.)

Exkurs: Numerische Darstellung der Kontinuitäts-Gleichung

Entsprechende unangenehme Eigenschaften zeigt auch die diskrete Kontinuitäts-Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_e - u_w = 0$$

Bei stückweise linearen Profilen ergibt sich:

$$\frac{u_E + u_p}{2} - \frac{u_p + u_W}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_E - u_W = 0$$

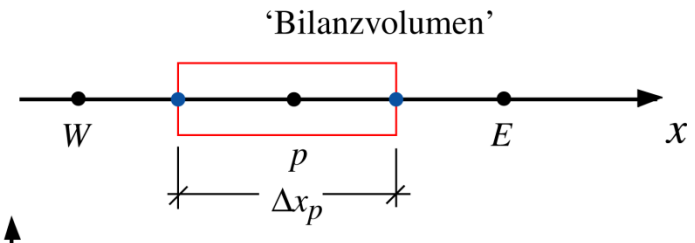
Auch hier entkoppeln die benachbarten Geschwindigkeitswerte. Die numerische Lösung lässt wie beim Druck unphysikalische Zick-Zack-Profile gelten.

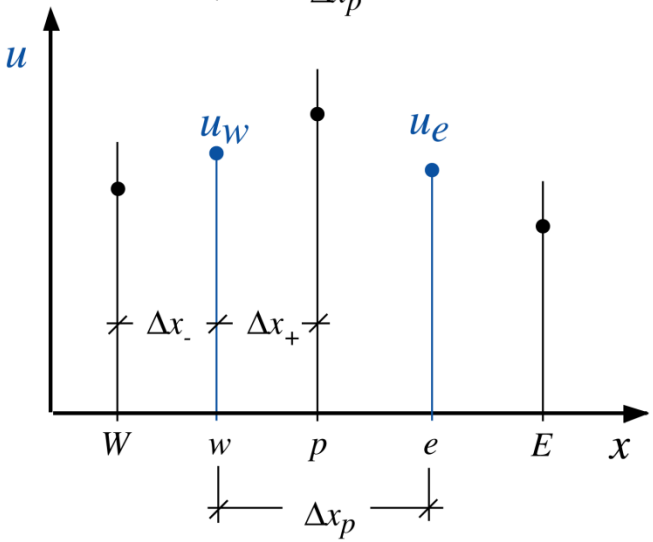
Ziel: Beseitigung solcher Schwierigkeiten

1. Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes bei vorg. Druck (Forts.)

Ein Heilmittel: **das versetzte Gitter**

(engl. staggered grid)





Wir sind gar nicht gezwungen alle Variablen am gleichen Gitterpunkt anzulegen.

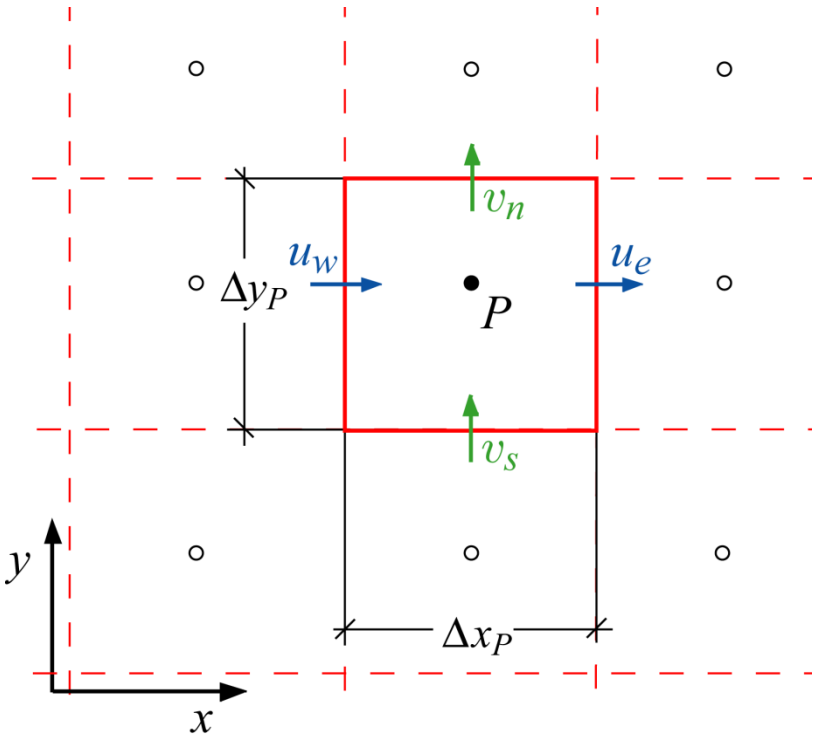
Für jede Variable könnte ein anderes Gitter Verwendung finden.

Es bietet sich an, die Geschwindigkeiten nicht in den Zellzentren bei *p*, sondern direkt auf den Zellflächen *w* bzw. *e* zu definieren, weil ja gerade dort die Flüsse gebildet werden müssen und wichtiger, weil dann die beschriebenen Schwierigkeiten bei der Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung unmittelbar verschwinden.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_e - u_w = 0$$

1. Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes bei vorg. Druck (Forts.)

Das versetzte Gitter in zwei und mehr Dimensionen

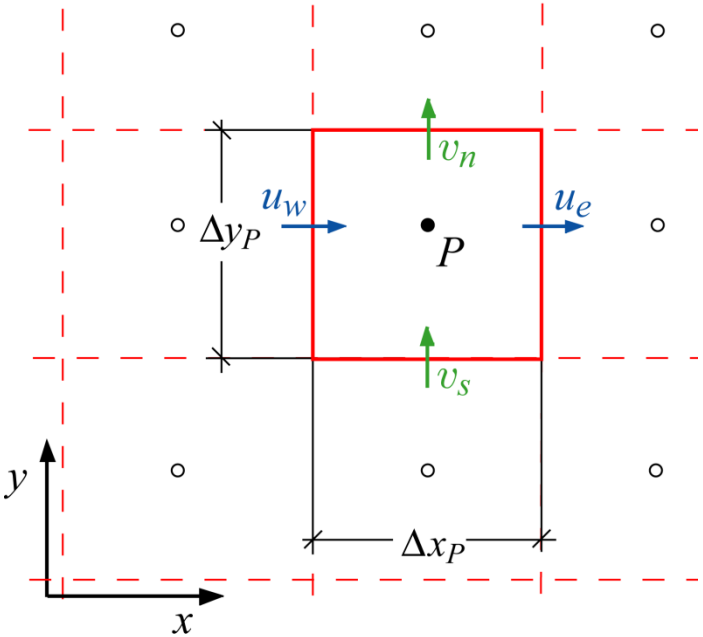


Die Definitionsorte der u-Komponente der Geschwindigkeit ist in Bezug auf die Gitterpunkte p für die Bilanzzelle in x-Richtung (blau) verschoben, entsprechend ist der Definitionsort der v-Komponente der Geschwindigkeit in y-Richtung (grün) verschoben definiert.

Unabhängig davon, ob die Bilanzflächen mittig zwischen den Gitterpunkten liegen, werden die Geschwindigkeiten auf diesen Bilanzflächen definiert. Entsprechend wird in drei Dimensionen vorgegangen.

1. Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes bei vorg. Druck (Forts.)

Bestimmung des Massenflusses



Mit dieser Definition kann der Massenfluss über die Oberflache ohne jegliche Interpolation angegeben werden. Es gilt ganz einfach:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j})\Delta y_j + (v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2})\Delta x_i = 0$$

Der Hauptvorteil ist: Benachbarte Gitterpunkte werden zur Diskretisierung der Kontinuitäts-Gleichung benutzt. Der Zick-Zack-Effekt ist nicht mehr möglich.

Analoges folgt für den Druck: Wird der Druck ebenfalls auf den Bilanzflächen definiert, so folgt die das Geschwindigkeitsfeld treibende Druckdifferenz sofort aus dem Druckunterschied an den beiden Zellgrenzen.

Die Impulsgleichungen

Erinnerung:

Die Impulsgleichung hat dieselbe Struktur wie unsere Modellgleichung für den konvektiv-diffusen Transport eines Skalars, wobei der Druckgradient als Quellterm fungiert.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{mit} \quad \phi_x = \rho u u - \eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ist das Druckfeld gegeben, kann für das Geschwindigkeitsfeld gelöst werden.

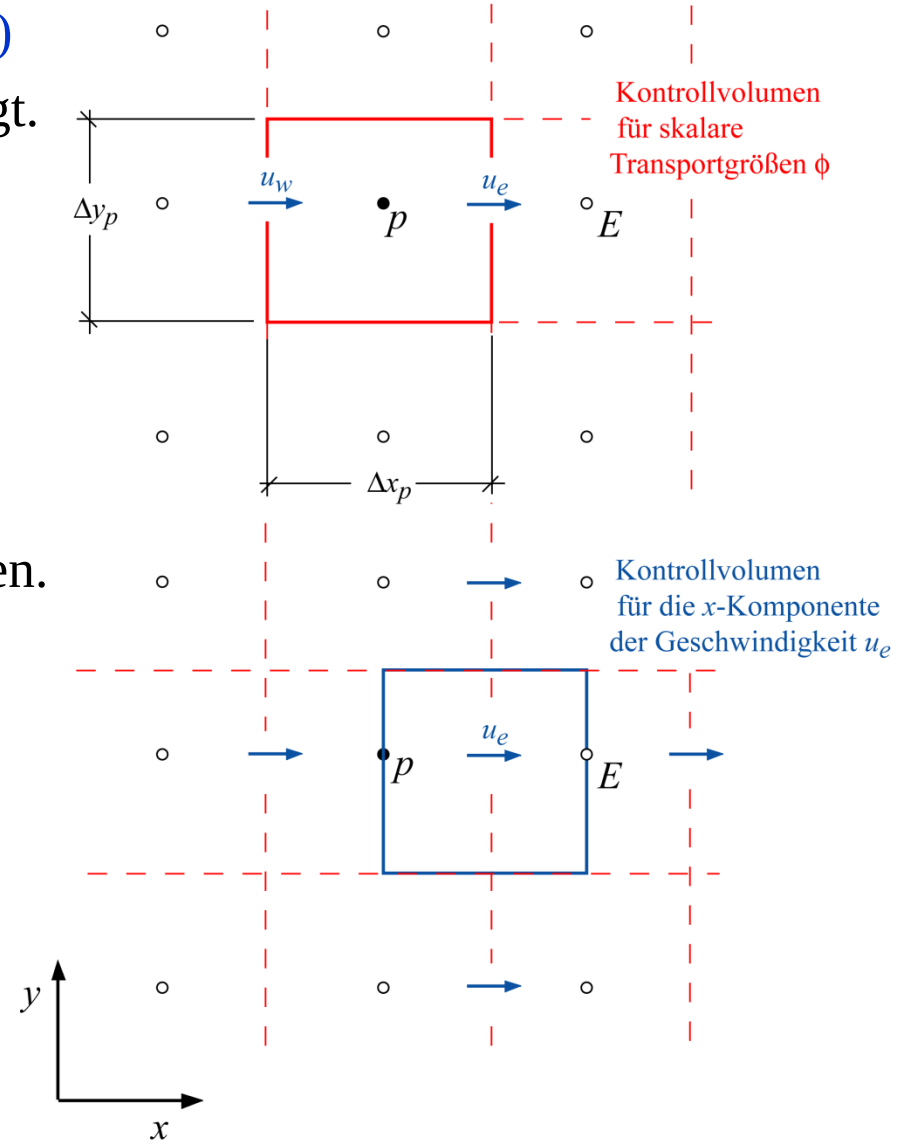
Die Einführung des versetzten Gitters macht die Behandlung aber in einigen Punkten anders, da die gesuchte abhängige Variable *u* jetzt nicht mehr in den Zellzentren sondern auf den Grenzen des Kontrollvolumens definiert ist.

Die Impulsgleichungen (Forts.)

Nebenstehend ist das Kontrollvolumen (blau) für die Impulsgleichung in x-Richtung gezeigt.

Die Definitionsorte der u-Komponente der Geschwindigkeit sind in Bezug auf die Gitterpunkte p in <u>x-Richtung</u> verschoben, entsprechend ist das Kontrollvolumen (blau) für die Impulsbilanz in <u>x-Richtung</u> verschoben.

Der Druck bleibt an den Punkten p und E definiert kann unmittelbar zur Formulierung der resultierenden Druckkraft auf das Kontrollvolumen der Impulsbilanz (blau) herangezogen werden (der entscheidende Vorteil des versetzten Gitters).



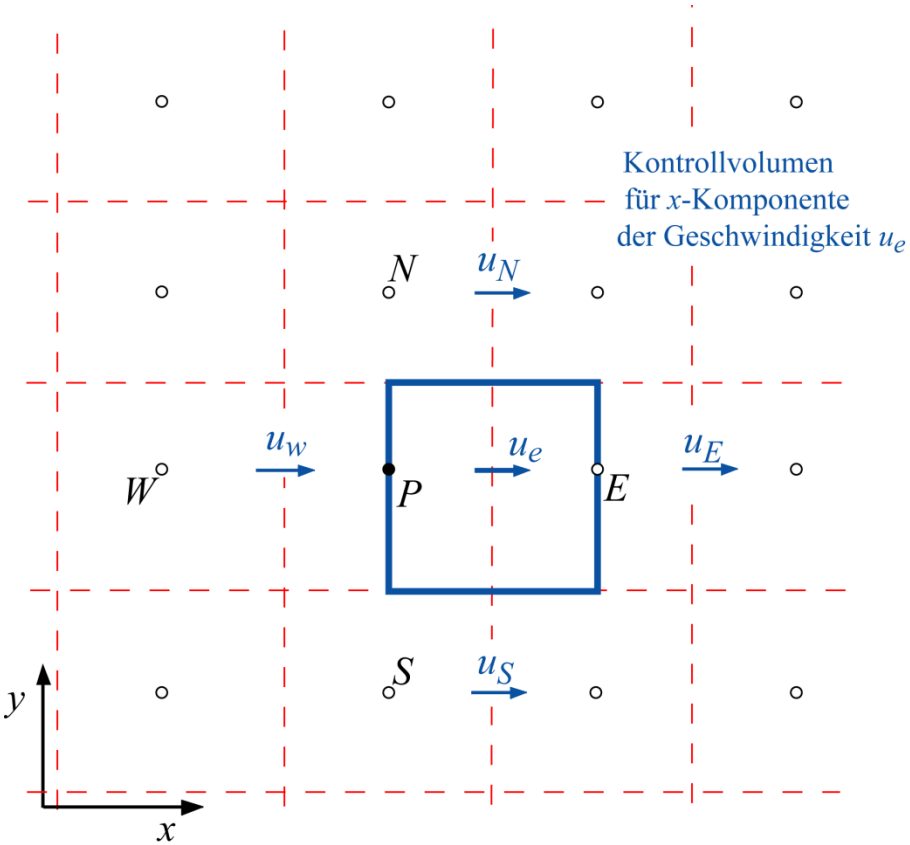
Die Impulsgleichungen (Forts.)

Die entsprechende diskrete Formulierung für die zweidimensionale, instationäre Impulsgleichung in *x*-Richtung lautet:

$$\tilde{a}_p\, u_e^{\nu+1} = a_E\, u_E^{\nu} + a_W\, u_W^{\nu} + a_N\, u_N^{\nu} + a_S\, u_S^{\nu} + b + \frac{p_p - p_E}{\Delta x_p} \Delta x_p \Delta y_p$$

Gegenüber der bekannten Diskretisierung ist hier der diskretisierte Druckterm als Quellterm neu.

Bei *gegebenem* Druckfeld kann obige Gleichung zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponenete *u* in *x*-Richtung ausgewertet werden.

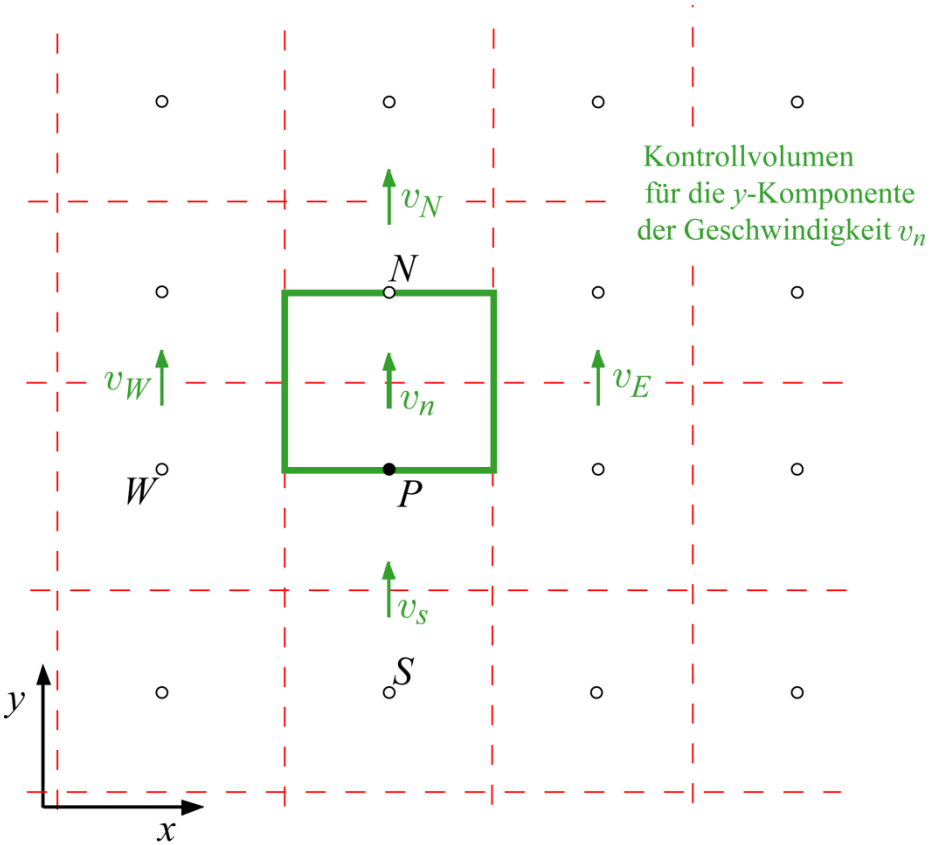


Die Impulsgleichungen (Forts.)

Die entsprechende diskrete Formulierung für die zweidimensionale Impulsgleichung in *y*-Richtung lautet:

$$\tilde{a}_p\, v_n^{\nu+1} = a_E\, v_E^{\nu} + a_W\, v_W^{\nu} + a_N\, v_N^{\nu} + a_S\, v_S^{\nu} + b + \frac{p_p - p_N}{\Delta y_p} \Delta x_p \Delta y_p$$

Das zugehörige Kontrollvolumen ist nun in *y*-Richtung versetzt, wie in der Skizze dargestellt, und die resultierende Druckkraft in *y*-Richtung geht ein.



Bei *gegebenem* Druckfeld kann obige Gleichung zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponenete v in *y*-Richtung ausgewertet werden.

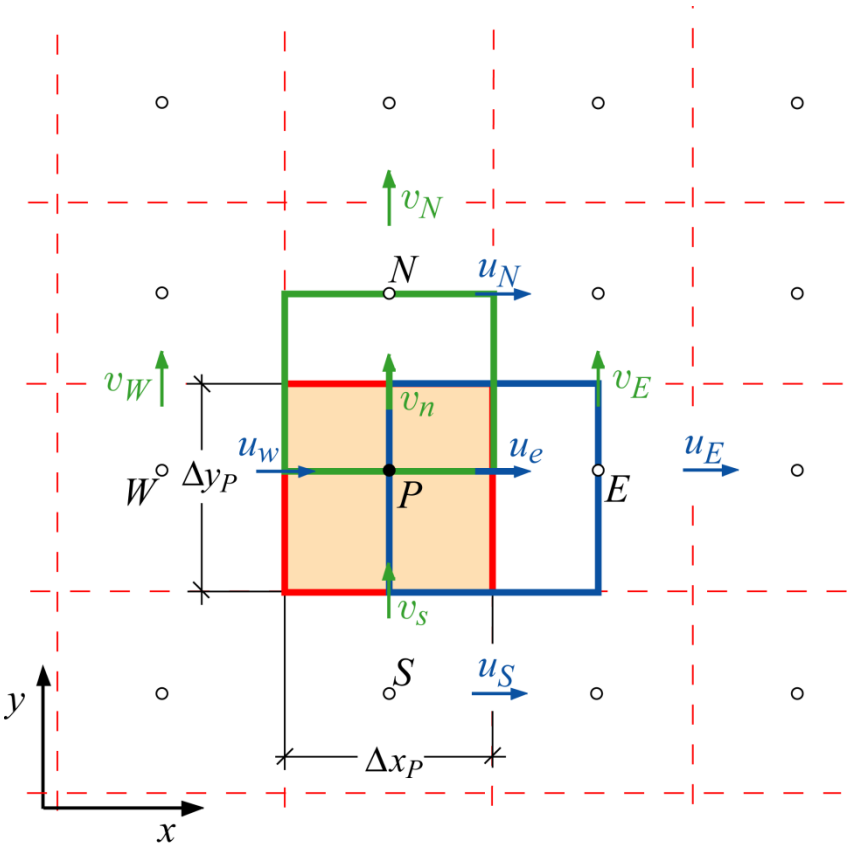
Zusammenfassend:

Anordnung der Bilanzvolumen für die numerische Integration der Erhaltungsgleichungen für skalare Felder und den Impuls in zwei Dimensionen

Bilanz für einen Skalar: Kontrollvolumen (rot)

Bilanz für den *x*-Impuls:
Kontrollvolumen (blau) zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponente u_e an der östlichen Kontrollfläche des blauen Kontrollvolumens

Bilanz für den *y*-Impuls:
Kontrollvolumen (grün) zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponente v_n an der nördlichen Kontrollfläche des blauen Kontrollvolumens



3. Praktikumsaufgabe (hier Teilaufgabe 3.1):

a) Formulieren Sie die Finite-Volumen-Bilanz für die Impulsgleichung in zwei Dimensionen

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}+\mathrm{div}\vec{\vec{F}} = -\mathrm{grad}\,p \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \rho u\,u - \eta\,\partial u/\partial x & \rho v\,u - \eta\,\partial u/\partial y \\ \rho u\,v - \eta\,\partial v/\partial x & \rho v\,v - \eta\,\partial v/\partial y \end{pmatrix}$$

auf einem nichtäquidistanten kartesischen Gitter, wobei der Druck und die Geschwindigkeitskomponenten auf versetzten Gittern angeordnet sein sollen!

b) Implementieren sie einen geeigneten Algorithmus zur numerischen Integration der Impulsgleichung, indem Sie die in der 3. Praktikumsaufgabe erarbeitete Programmpaket nutzen und passend ergänzen!

c) Überlegen Sie sich geeignete Testprobleme für eindimensionale und zweidimensionale reibungsbehaftete Strömungen, von denen eine analytische Lösung angegeben werden kann!

d) Evaluieren Sie Ihre Programm anhand dieser Testprobleme!