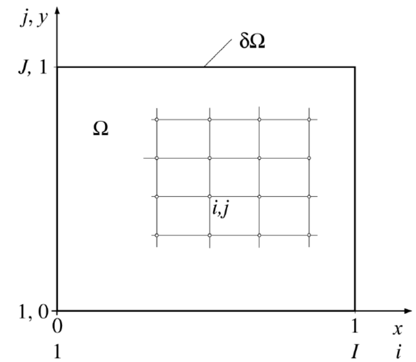
Numerische Strömungssimulation
Übung 15.05.2017

Dominik Goeb

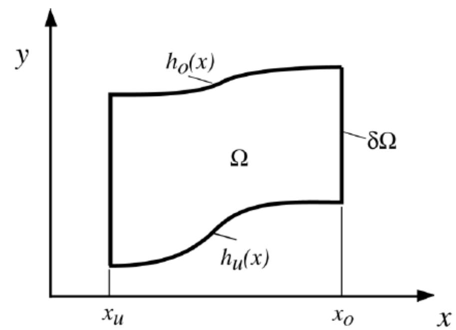
Institute for Combustion Technology
RWTH Aachen University

1. Meilenstein

- Potentialströmung in einem kartesischen Gitter:



- Potentialströmung in einem gekrümmten Kanal:



- Minimalanforderung: Testfälle zum Nachweis, dass der implementierte Algorithmus fehlerfrei funktioniert, und einen Anwendungsfall.

Testfälle

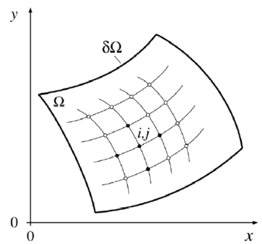
- Einfache analytische Lösung der Potentialströmung wählen:
  - Parallelströmung
  - Staupunktströmung
  - ...
- Randbedingungen entsprechend der analytischen Lösung setzen.
- Feld im Inneren des Rechengebiets durch iterativen Löser lösen lassen (jeweils für kartesische Koordinaten und transformierte Koordinaten).
- Ergebnis mit analytischer Lösung vergleichen, Fehler berechnen.
- Schlussfolgerung: Löser korrekt implementiert?

Anwendungsfall

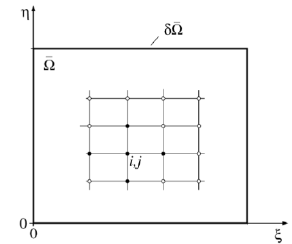
- Physikalische Problemstellung, für die keine analytische Lösung direkt bekannt ist.
- Hier: Strömung in einem gekrümmten Kanal
  - Vertikale Ein- und Ausströmränder
  - Gekrümmte Wände
- Randbedingungen formulieren und setzen.
- Strömung durch iterativen Löser berechnen lassen.
- Ergebnisse bewerten.

Hinweise zum 2. Praktikumsbeispiel (gekrümmter Kanal)

1. Lösung der Laplace-Gleichung auf transformiertem Koordinatensystem:

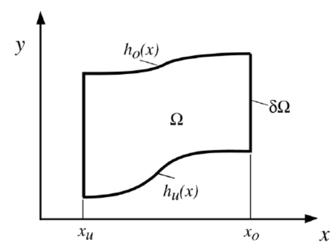


$(x, y) \longrightarrow (\xi, \eta)$



   a) Laplace-Gleichung transformieren
   b) Transformierte Gleichung diskretisieren
   c) Diskretisierte Gleichung auf rechtwinkligem Gitter lösen

2. Implementierung der Randbedingungen für gekrümmten Kanal
   a) Ein- und Ausströmränder
   b) Wände ohne Haftbedingung



Hinweise zum 2. Praktikumsbeispiel (gekrümmter Kanal)

Zu 1.: Lösung der Laplace-Gleichung auf transformiertem Koordinatensystem:

- Laplace-Gleichung im kartesischen System:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

- Kettenregel:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}$$

- Finale Gleichung der Form

$$f\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}, \ldots, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \ldots\right) = 0$$

Hinweise zum 2. Praktikumsbeispiel (gekrümmter Kanal)

Zu 1.: Lösung der Laplace-Gleichung auf transformiertem Koordinatensystem:

1. Transformierte Laplace-Gleichung:

$$f\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}, \ldots, \frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \ldots\right) = 0$$

2. Metrische Terme sind schon vor iterativer Lösung bekannt und nur Funktion der Koordinatentransformation!

$$\alpha_1 \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} + \alpha_4 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \alpha_5 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \alpha_6\phi = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2},$$

$$\alpha_2 = \ldots$$

Hinweise zum 2. Praktikumsbeispiel (gekrümmter Kanal)

Zu 1.: Lösung der Laplace-Gleichung auf transformiertem Koordinatensystem:

III. Berechnung der Koeffizienten α_i bereits vor iterativem Lösungsverfahren:

a) Analytisch aus der Koordinatentransformation

b) Ebenfalls über finite Differenzen:

bspw.:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\eta(x_{i,j}, y_{i,j} + \Delta y) - \eta(x_{i,j}, y_{i,j} - \Delta y)}{2\Delta y}$$

Letztere Methode ist vorzuziehen, da allgemeingültige Formulierung für alle Koordinatentransformationen und eventuell sogar genauer.

Hinweise zum 2. Praktikumsbeispiel (gekrümmter Kanal)

Zu 11.: Implementierung der Randbedingungen für gekrümmten Kanal:

1. Ein- und Ausströmränder:
   - Keine Geschwindigkeitsgradienten in y-Richtung.
   - Potential ist konstant und muss vorgegeben werden.
2. Wand ohne Haftbedingung:
   - Keine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand.

$$\frac{dh}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{\partial\phi}{\partial y} / \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dx} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

   - Gleichung muss diskretisiert und iterativ gleichzeitig mit dem Inneren des Rechengebietes gelöst werden.

Hinweise zum 2. Praktikumsbeispiel (gekrümmter Kanal)

Implementierungshinweise:

- Konturen $ho(x)$ und $hu(x)$ und darauf aufbauende Koordinatentransformationen $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ in metrics.cpp implementieren.
- Gitter $\xi(i, j)$ und $\eta(i, j)$ mit $\Delta\xi = 1$ und $\Delta\eta = 1$ in setup.cpp generieren.
- Metrische Terme in setup.cpp vorberechnen.
- Randwerte für Potential am Ein- und Ausströmrand setzen.
- Gleichungssystem im Inneren des Rechengebiets und auf den Wänden iterativ in solver.cpp lösen.
- Allgemein: Auf den Rändern des Rechengebietes einseitige Differenzen nutzen!