Simulationstechnik V

Vorlesung/Praktikum an der RWTH Aachen

Numerische Simulation von Strömungsvorgängen

B. Binninger

Institut für Technische Verbrennung

Templergraben 64

1. Teil (Fortsetzung)

Zusammenfassung 1. Teil

Praktikumsaufgabe „Potentialströmung“

- Lösung der Potentialgleichung und Stromfunktionsgleichung für eine stationäre, wirbel- und reibungsfreie zweidimensionale Strömung in einem Kanal

Die Praktikumsaufgabe besteht aus zwei Teilaufgaben

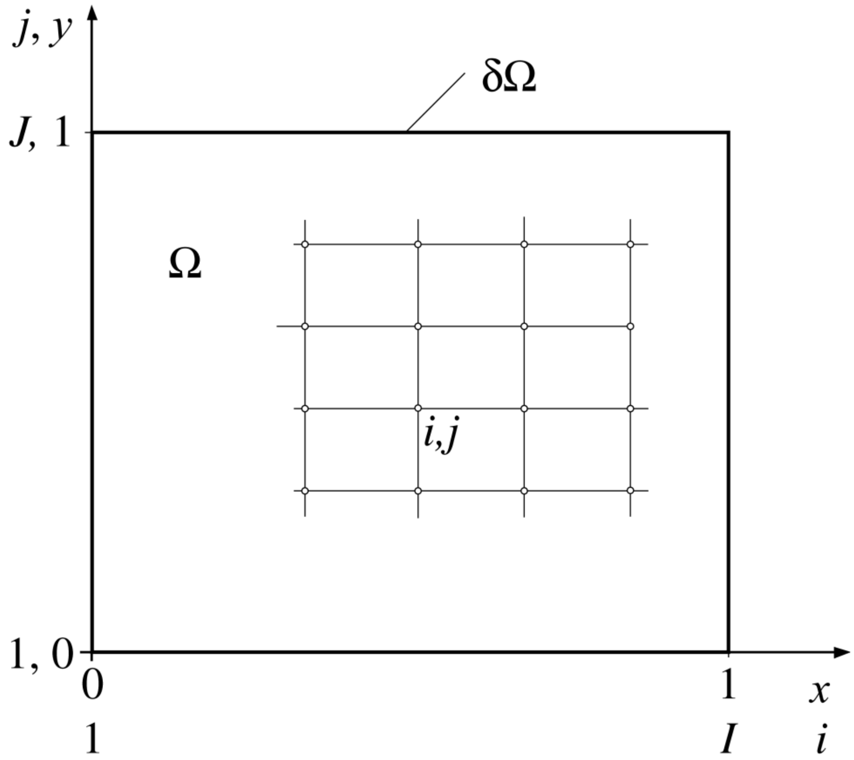
- Teil 1.1: Lösung der Laplace-Gleichungen für rechteckiges Integrationsgebiet
- Teil 1.2: Lösung der Laplace-Gleichungen für krummlinig berandetes Integrationsgebiet

Nutzanwendung des Teiles 1.2

- Konstruktion eines strukturierten numerischen Gitters aus krummlinigen orthogonalen Koordinaten

Differenzformulierung der Laplace- oder Poissongleichung auf nicht rechteckigem Intergrationsgebiet

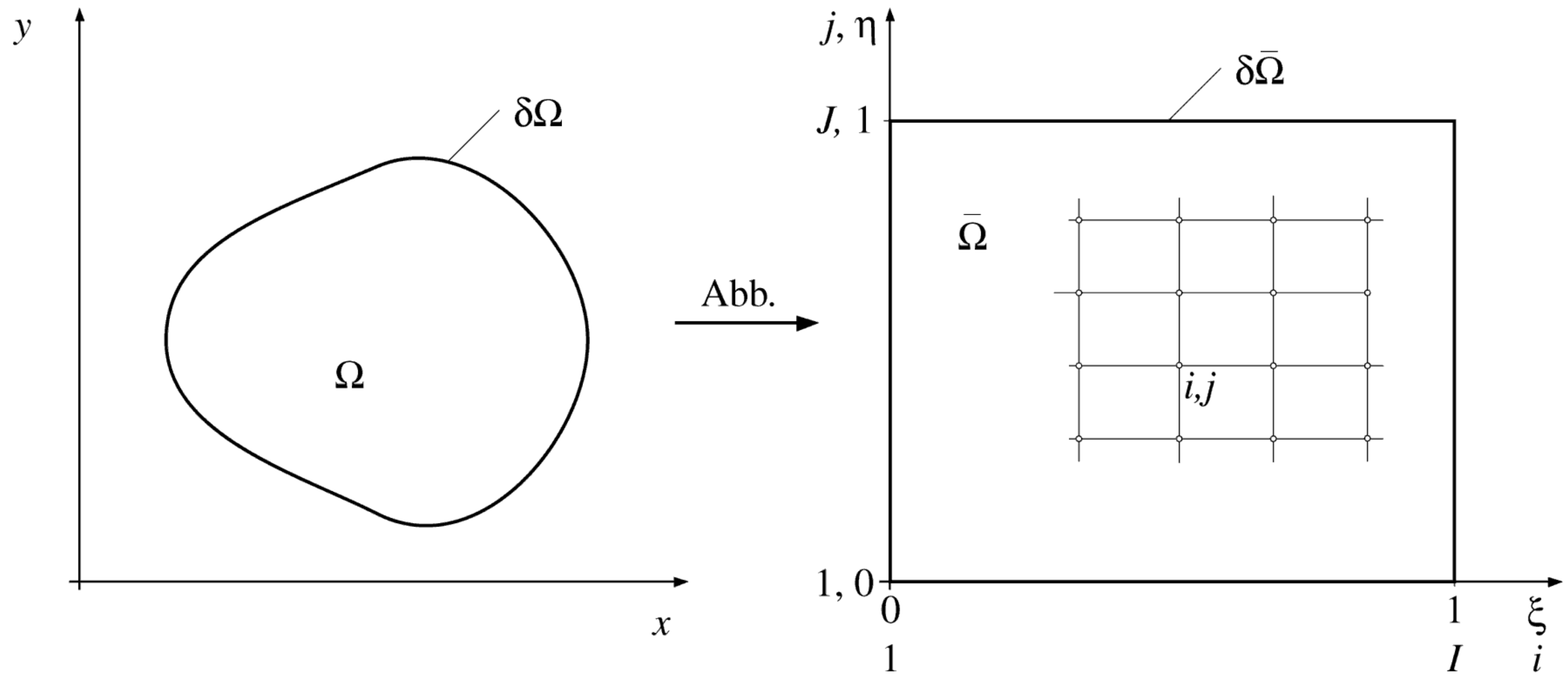
Integrationsgebiet (2D) rechteckig:



Bisher: Rechenraum identisch mit der physikalische Ebene

Krummliniges Integrationsgebiet

Integrationsgebiet (2D) nichtrechteckig:

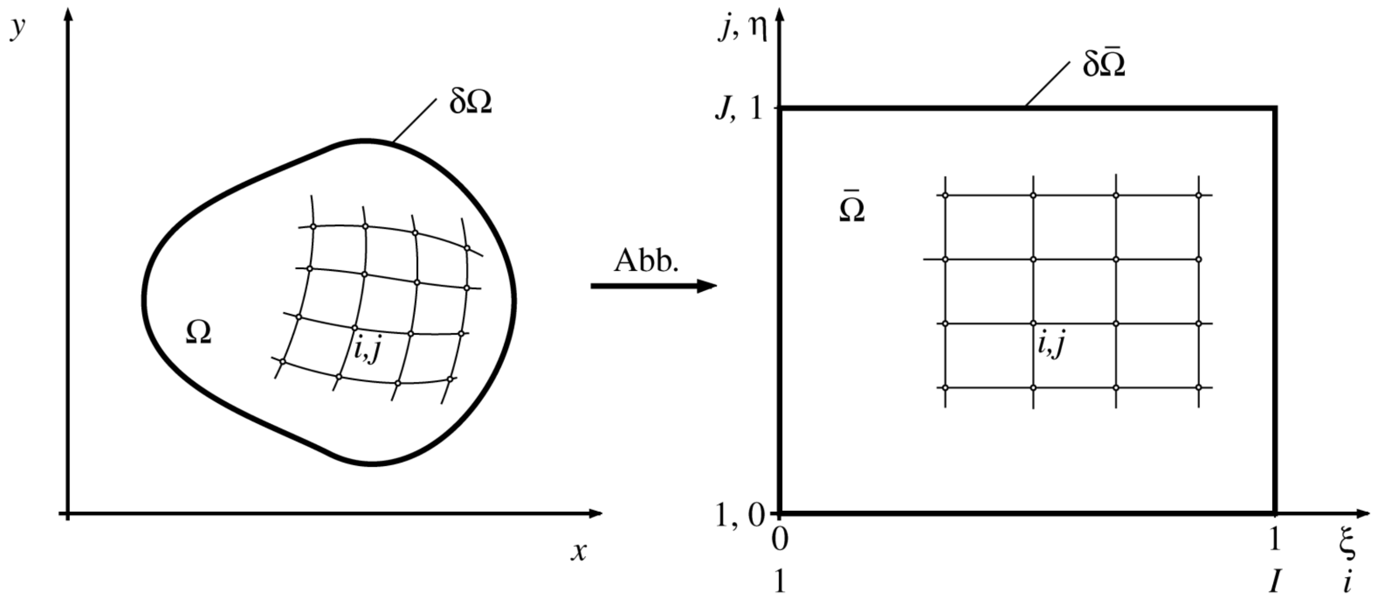


physikalische Ebene

transformierte Ebene (Rechenraum)

Motivation: die krummlinigen Ränder des Integrationsgebietes sind oft zum Beispiel durch vorgegebene feste Wände vorgeschrieben.

Eine Möglichkeit ist das krummlinige Integrationsgebiet auf ein rechteckiges Gebiet abzubilden und die Differentialgleichung passend zu transformieren.



Gesucht sind also die passenden Abbildungsfunktionen und deren Umkehrfunktionen, Die sowohl den Rand des Integrationsgebietes als auch die Knotenpunkte bzw. die Gitterlinien abbilden. Am Beispiel des stationären Problems also die Beziehungen

$$\xi = \xi(x, y) \quad , \quad x = x(\xi, \eta)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad , \quad y = y(\xi, \eta)$$

aufzustellen und die Dgl. auf die neuen abhängigen Koordinaten zu transformieren.

Koordinatentransformation

Laplace-Gleichung $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ mit $\xi = \xi(x,y)\ ,\ \eta = \eta(x,y)$

Wir fassen die Funktion ϕ als Funktion der neuen Unabhängigen ξ, η auf

$$\phi = \phi(\xi, \eta)$$

und wenden die Kettenregel an:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bullet} = \frac{\partial}{\partial \bullet}\, \phi(\xi(x,y),\, \eta(x,y)) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bullet} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \bullet} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \phi$$

$\bullet$ steht entweder für *x* oder für *y*

analog für 2. Ableitung

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bullet^2} &= \frac{\partial}{\partial \bullet} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bullet} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \bullet} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \phi = \\ &\left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \bullet^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \bullet^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \left((\frac{\partial \xi}{\partial \bullet})^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\, (\frac{\partial \xi}{\partial \bullet})(\frac{\partial \eta}{\partial \bullet}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + (\frac{\partial \eta}{\partial \bullet})^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \right) \phi \end{aligned}}$$

Ergebnis:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{Abbildung} \downarrow \quad \xi = \xi(x,y)\ ,\ \eta = \eta(x,y)$$

$$\left(\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \alpha_3\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \alpha_4\frac{\partial}{\partial\xi} + \alpha_5\frac{\partial}{\partial\eta} + \alpha_6\right)\phi = 0$$

Mit den Koeffizienten:

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = (\frac{\partial\xi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\xi}{\partial y})^2\ , \quad \ldots$$

Übung:

Bestimmen Sie die anderen Koeffizienten α_2 bis α_6 der transformierten, partiellen Differentialgleichung!

Randbedingungen am Beispiel ebener Strömungen

Definition des Potentials:

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\,\phi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,,\; v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

1) Einström- und Ausströmränder:

Vorgabe von Geschwindigkeitsprofilen mit der Nebenbedingungen: $\mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Beispiel: Ein- und Austritt bei festem *x*, fern von gekrümmten Wänden, weit stromauf

$$\rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{\mathrm{Rand}} = u\big|_{\mathrm{Rand}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{\mathrm{Rand}} = v\big|_{\mathrm{Rand}} \end{cases}$$

Integration liefert die passende Randbedingung.

2) Undurchlässige Wände

Strömungsrichtung ist bekannt. Deshalb ist die Strömungsgeschwindigkeit senkrecht zum Normalenvektor

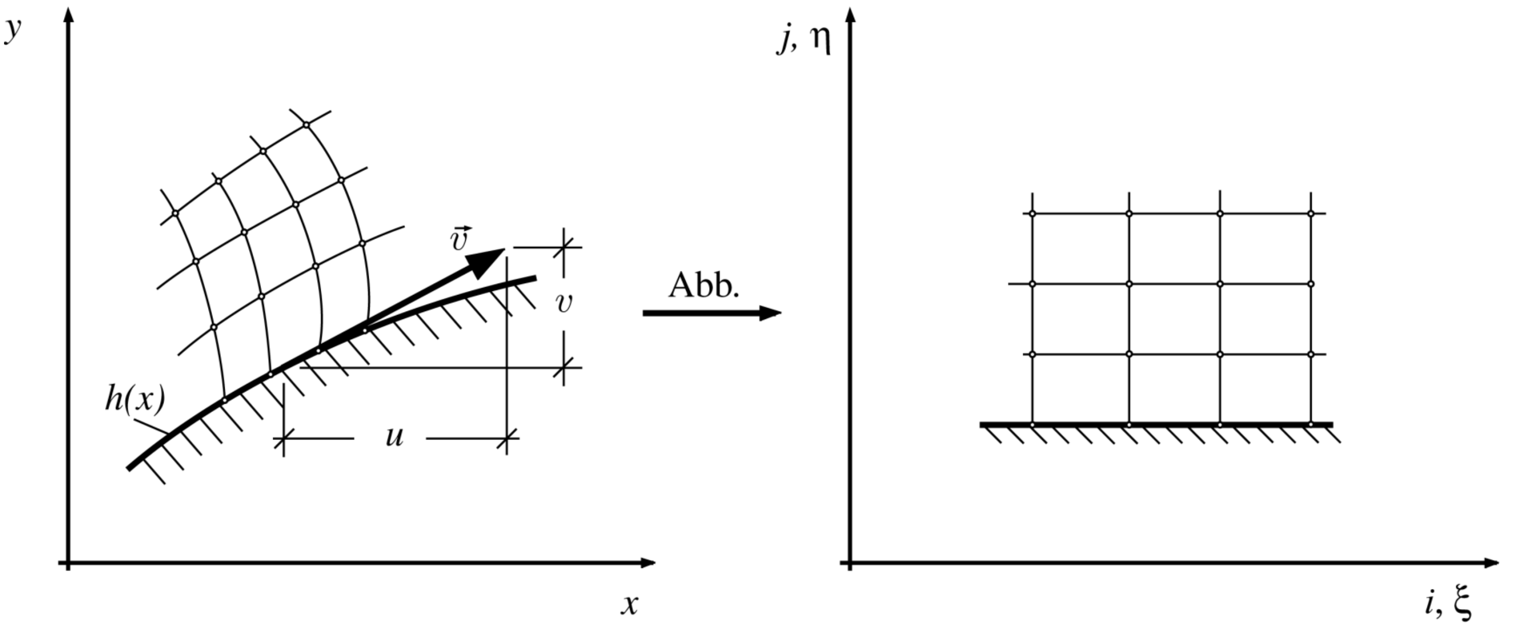
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -v \\ +u \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

also

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = \operatorname{grad} \phi \cdot \vec{n} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 0$$

Äquipotentiallinien stehen demnach senkrecht auf undurchlässigen Wänden.

Die alternative Formulierung dieses Sachverhaltes, dass die Wandrichtung mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammenfällt, führt zu der auf der nächsten Folie dargestellten Möglichkeit die Randbedingung für das Potential zu implementieren.



Es gilt auf der Kontur:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big/ \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Im transformierten Raum gilt dann:

$$\frac{dh}{dx} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \Big/ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \qquad (*)$$

Hinsichtlich der Stromfunktion gilt auf undurchlässigen Wänden: $\psi = \text{const}$

Die Aufgabe, diese Bedingung diskret zu formulieren, führt darauf, zu den Rändern hin einseitige Differenzenausdrücke für die Ableitungen zu formulieren.

Für die skizzierte Kontur *h(x)* zum Beispiel sind die einseitige Formulierung

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_{i,j} = \frac{-\phi_{i,j+2} + 4\,\phi_{i,j+1} - 3\,\phi_{i,j}}{2\Delta\eta} + \mathcal{O}(\Delta\eta^2)$$

und die gewöhnliche zentrale Formulierung notwendig:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} + \mathcal{O}(\Delta\xi^2)$$

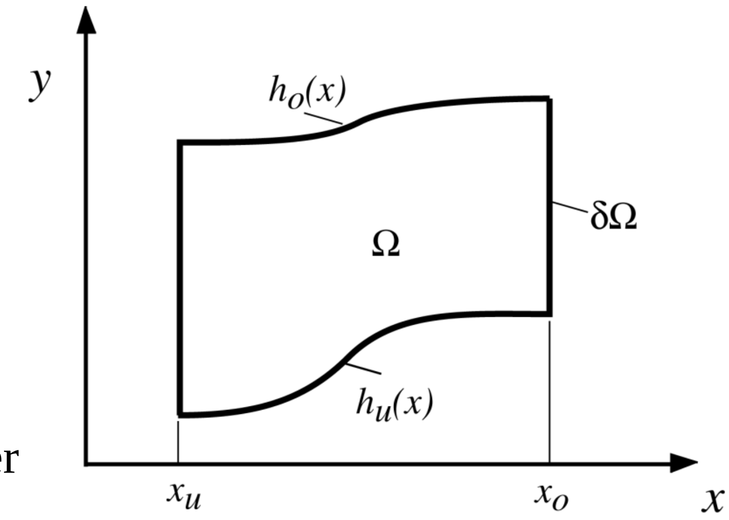
Wird dies in ($*$) eingesetzt, ergibt sich ein Gleichungssystem für die Unbekannten Werte der Lösungsfunktion $\phi_{i,j}$ auf einem Rand j=const.

Übungsaufgabe:

Formulieren Sie die Randbedingungen der Stromfunktion für ebene Probleme an Ein- und Ausströmrändern und an undurchlässigen Wänden!

Zweites Praktikumsbeispiel

a) Erweitern Sie das Programmpaket dahingehend, dass die Potentialgleichung auf einem krummlinig berandeten Integrationsgebiet der Art wie in der nebenstehenden Skizze gelöst wird!
Geben Sie dazu eine geeignete Abbildung des Integrationsgebietes auf ein Rechteck an und transformieren sie die Laplace-Gleichung mit dieser Abbildung!

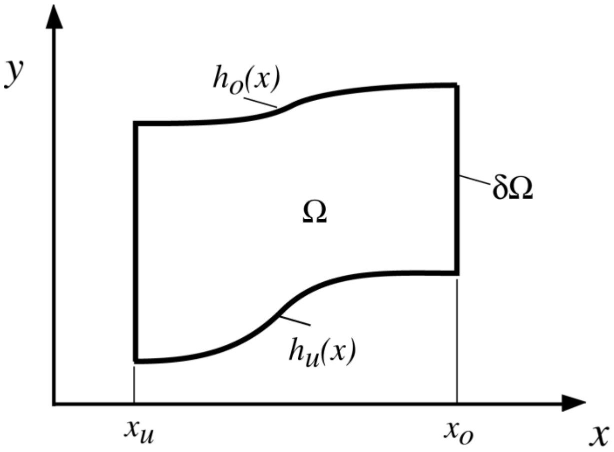


b) Erweitern Sie den Strömungslöser so, dass er wahlweise für die Potential- oder die Stromfunktion genutzt werden kann!

c) Interpretieren Sie die untere und obere Kontur als Wände und die rechte und linke Kontur als Ein- bzw. Ausströmrand und berechnen sie mit geeigneten Randbedingungen eine inkompressible, stationäre Potentialströmung in diesem Gebiet!

d) Geben Sie die berechneten Potential- und Stromlinien in Höhenliniendarstellung grafisch aus!

Erläuterungen zur Aufgabenstellung



$$\xi = \xi(x) = \frac{x - x_u}{x_o - x_u}, \quad \eta = \eta(x,y) = \frac{y - h_u(x)}{h_o(x) - h_u(x)}$$

Die Funktionen $h_u(x)$, $h_o(x)$ sowie die Werte x_u und x_o müssen vorgegeben werden.

Daraus folgen die notwendigen Ableitungen: $\frac{\partial \xi}{\partial \bullet}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial \bullet^2}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \bullet}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \bullet^2}$
entweder durch analytische Differentiation der Transformation oder durch numerische Approximation der partiellen Ableitungen.

Bemerkung: Der zweite Weg ist vorzuziehen, da dadurch eine konsistente Darstellung von Geometrie und Differenzenformulierung der transformierten Dgl. erzielt werden kann. Dies setzt voraus, dass die Ableitungsapproximationen gleichartig ausgeführt werden (hier zentrale Differenzen).

In beiden Fällen müssen die Koordinaten x und y, also die Umkehrfunktionen zur obigen Koordinatentransformation an den Gitterknoten bekannt sein.

Aus

$$\xi = \xi(x) = \frac{x - x_u}{x_o - x_u}, \quad \eta = \eta(x,y) = \frac{y - h_u(x)}{h_o(x) - h_u(x)}$$

folgt unmittelbar:

$$x = x(\xi) = x_u + \xi\ (x_o - x_u)\ , \quad y = y(\xi,\eta) = h_u(x_{(\xi)}) + \eta\ \left(h_o(x_{(\xi)}) - h_u(x_{(\xi)})\right)$$

Auch für die grafische Auswertung der Ergebnisse der Rechnungen ist die Kenntnis der Lage der Gitterknoten sinnvoll.

Im allgemeinen also die Berechnung der Felder $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ aus den Werten $\xi_{i,j}$, $\eta_{i,j}$ im Code erforderlich.

Bemerkung:

Es ist sinnvoll folgende Setzung zu machen: $\xi_i = i$, $\eta_j = j \Rightarrow \Delta\xi = 1$, $\Delta\eta = 1$.

Es entfallen im Code eine Reihe von Divisionen, die Codierung der Löser wird übersichtlicher.

Wie sieht in diesem Fall die Koordinatentransformation aus?

Die Diskretisierung der Terme der partiellen Differentialgleichung

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha_5 \frac{\partial}{\partial \eta} + \alpha_6\right) \phi = 0$$

auf orthogonalem Gitter mit konstanten Schrittweiten und zentralen Differenzen führt auf die Beziehungen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} + \mathcal{O}(\Delta\xi^2), \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta\eta} + \mathcal{O}(\Delta\eta^2),$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} + \mathcal{O}(\Delta\xi^2), \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} + \mathcal{O}(\Delta\eta^2),$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} + \mathcal{O}(\Delta\xi\Delta\eta)$$

Die partielle Differentialgleichung wird ersetzt durch folgende algebraische Differenzengleichung

$$\mathcal{AF}\Big(\phi_{i,j},\, \phi_{i-1,j-1},\, \phi_{i,j-1},\, \phi_{i+1,j-1},\, \phi_{i-1,j},\, \phi_{i+1,j},\, \phi_{i-1,j},\, \phi_{i-1,j+1},\, \phi_{i+1,j+1},\, \alpha_{1_{i,j}},\, \alpha_{2_{i,j}},\, \alpha_{3_{i,j}},\, \alpha_{4_{i,j}},\, \alpha_{5_{i,j}},\, \alpha_{6_{i,j}};\ \Delta\xi,\, \Delta\eta\Big) = 0$$

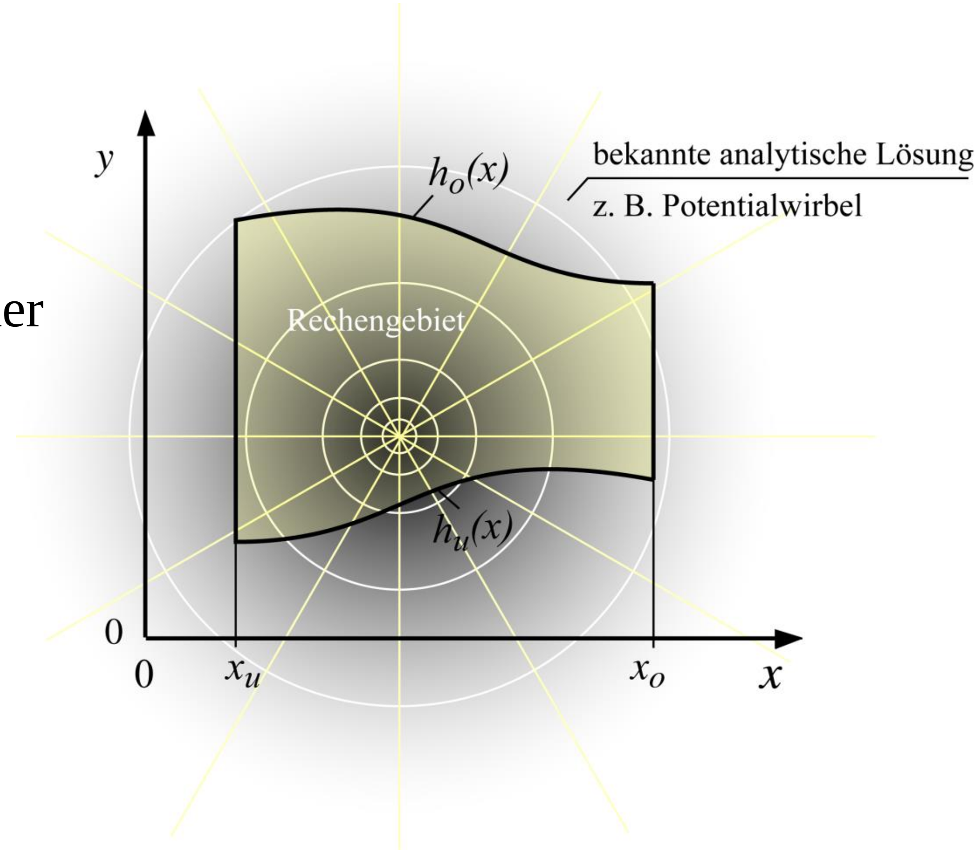
für alle $i = 1\,, \ldots\,, I\,, \quad j = 1\,, \ldots\,, J$

Die Lösung dieses Gleichungssystems kann entweder explizit oder implizit mit entsprechenden iterativen Lösern (Jacobi, Gauß-Seidel, Thomas-Algorithmus,…) erfolgen, wie bereits für das kartesische Problem beschrieben.

Test des Programmpaketes

Zur Überprüfung der korrekten Programmierung des Problem eignen sich wiederbekannte analytischen Lösungen, wie sie in Teil 1 aufgeführt sind.

Über einem Rechengebiet, dass durch die Abbildungsfunktionen $\xi(x,y)$ und $\eta(x,y)$ festgelegt ist, wird bei Vorgabe der Randbedingungen aus der gewählten analytischen Lösung die numerische Lösung erzeugt und mit der exakten Lösung verglichen.



Zweite Teilaufgabe zum Praktikumsbeispiel „Potentialströmung“

Berechnung einer *zweidimensionalen stationären, wirbel- und reibungsfreien* Strömung auf einem krummlinigen Integrationsgebiet durch numerische Lösung der *Potentialgleichung* mit einem *iterativen* Gleichungslöser.

a) Transformieren Sie die Laplace-Gleichung auf ein rechtwinkliges Integrationsgebiet!

b) Formulieren Sie die Differenzengleichung des Problems!

c) Wählen Sie ein Testproblem: Strömung, Integrationsgebiet und geeignete Randbedingungen!

d) Formulieren Sie ein algebraisches Gleichungssystem für eine numerische Lösung der Potentialgleichung oder Stromfunktionsgleichung!

e) Lösen Sie das Gleichungssystem mit einem oder mehreren einfachen Lösungsalgorithmen!

f) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld!

g) Berechnen Sie das Druckfeld!

Die Schritte e), f), g) sind identisch mit den Schritten d), e), f) der ersten Teiaufgabe

Programmieraufgaben (wie erstes Teilproblem)

1) Routine für Eingabedaten
   Steuerdaten zu Integrationsgebiet, Anzahl der Stützstellen, Schrittweite, ...

2) Routine für Startbelegung
   (z.B. exakte Lösung eines Testproblems)

2) Routine für Randbedingungen

3) Routine für den Lösungsalgorithmus

4) Routine für die Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten

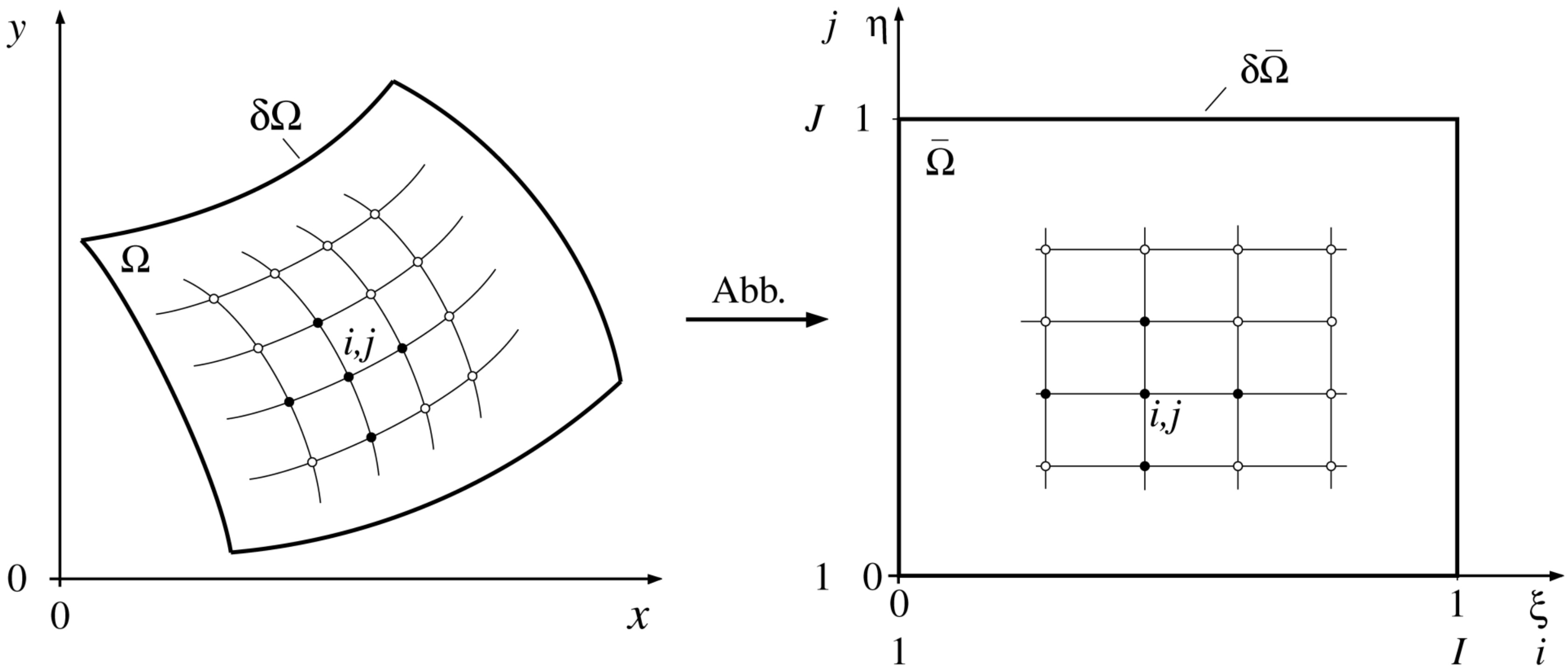
5) Routine für die Berechnung des Druckbeiwertes

6) Routine für die Ausgabe

7) Routine für die Fehleranalyse (z.B. Vergleich mit exakter Lösung)

Differenzformulierung auf geordneten, strukturierten Gittern

Integrationsgebiet (2D, krummlinig):



Physikalische Ebene

$$0 \le \xi \le 1 \quad ; \quad 1 \le i \le I$$

$$0 \le \eta \le 1 \quad ; \quad 1 \le j \le J$$

Schrittweiten: $\Delta\xi = \dfrac{1}{I-1}\,,\ \Delta\eta = \dfrac{1}{J-1}$

Beispiele für Potentialströmungen

Parallelströmung: $$\phi = u_\infty x + v_\infty y\,, \quad \psi = -v_\infty x + u_\infty y$$

Ebene Staupunktströmung: $$\phi = a\,(x^2 - y^2)\,, \quad \psi = 2\,a\,xy$$

Quelle: $$\phi = \frac{S}{2\pi} \ln\sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \psi = \frac{S}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Potentialwirbel: $$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\,, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

Dipol: $$\phi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \quad \psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Es gilt wegen der Linearität der Differentialgleichungen das Superpositionsprinzip!

Beispiel Halbkörper: Superposition aus Parallelströmung und Quelle

Druckbeiwert: $$c_p = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} v_{\mathrm{ref}}^2} = \frac{p - p_{\mathrm{ref}}}{\frac{\rho}{2} v_{\mathrm{ref}}^2} = \frac{\frac{\rho}{2} v_{\mathrm{ref}} - \frac{\rho}{2} v^2}{\frac{\rho}{2} v_{\mathrm{ref}}^2} = 1 - \frac{v^2}{v_{\mathrm{ref}}^2}$$

Zusammenfassung 2. Teilaufgabe des Teiles 1 des Praktikums

Praktikumsaufgabe „Potentialströmung“ auf kartesischem Gitter

- Lösung der Potentialgleichung für eine stationäre,
  wirbel- und reibungsfreie zweidimensionale Strömung in einem Kanal
  veränderlichen Querschnitts

- Lösung der Stromfunktionsgleichung für eine stationäre,
  wirbel- und reibungsfreie zweidimensionale Strömung in einem Kanal
  veränderlichen Querschnitts