

Simulationstechnik V

Vorlesung/Praktikum an der RWTH Aachen

Numerische Simulation von Strömungsvorgängen

B. Binninger

Institut für Technische Verbrennung

Templergraben 64

6. Teil

In unserer Konvektions-Diffusions-Modellgleichung hatten wir das Geschwindigkeitsfeld als gegeben vorausgesetzt.

Im Allgemeinen wird das Strömungsfeld aber nicht vorweg bekannt sein. Es muss durch Integration von Transportgleichungen ermittelt werden:

Zur Verfügung stehen für inkompressible Strömungen die **Kontinuitätsgleichung** und die **Impulsgleichungen**.

Die Impulsgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten haben die gleiche Struktur wie die Transportgleichung von skalaren Größen.

Wir werden also einige Ideen von vorher übernehmen, müssen aber besondere Schwierigkeiten berücksichtigen.

Zunächst bemerkt man, dass die Transportgleichung nichtlinear wird. Beispielsweise die Impulsgleichung für die x -Komponente der Geschwindigkeit einer zweidimensionalen Strömung:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u u - \eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \rho v u - \eta \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Der nichtlineare Term ist:
$$\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} = \frac{\partial((\rho u) u)}{\partial x}$$

Solche nichtlinearen Terme werden linearisiert, indem die Massenflussdichte ρu zeitlich entwickelt wird (ν Zeitschrittzähler):

$$(\rho u)^{\nu+1} u^{\nu+1} \approx (\rho u)^{\nu} u^{\nu+1}$$

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Als nächstes fällt der unbekannte Druck oder Druckgradient in der Impulsgleichung auf:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u u - \eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \rho v u - \eta \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Hier liegt auch die eigentliche Schwierigkeit.

Als weitere Gleichung steht nur die Kontinuitätsgleichung zur Verfügung, in der der Druck allerdings nicht direkt vorkommt.

Der Zusammenhang ist folgender:

Wird der korrekte Druck in die Impulsgleichung eingesetzt, dann bildet sich ein Geschwindigkeitsfeld heraus, welches die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt.

Bemerkung:

Alternativer Ansatz (insbesondere in zwei Dimensionen)

Eine denkbare Möglichkeit ist es, den Druck aus den Gleichungen zu eliminieren.

Bei der Besprechung der Potentialströmungen hatten wir gesehen, dass die Bildung der Rotation der Impulsgleichung den Druckgradienten eliminiert.

Man erhält die [Wirbeltransportgleichung](#).

Die Definition eines [Vektorpotentials](#), in zwei Dimensionen die [Stromfunktion](#), erfüllt die Kontinuitätsgleichung. Mit der Definition des Wirbelvektors erhalten wir eine zweite Gleichung für das Vektorpotential.

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Zielsetzung eines direkten Verfahrens:

Die indirekte Information der Kontinuitäts-Gleichung hinsichtlich des Druckfeldes soll so umformuliert werden, dass sich ein direkter Algorithmus zur Bestimmung des Druckfeld ergibt.

Wir wollen uns der numerischen Integration der Impulsgleichung in zwei Schritten nähern.

1. vorgegebenes Druckfeld: Druckgradient als bekannter Quellterm
2. Kopplung Impulsgleichung Kontinuitätsgleichung zur Bestimmung des passenden Druckfeldes

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Wir betrachten zunächst die eindimensionale Impulsgleichung

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{mit} \quad \phi_x = \rho u u - \eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

mit dem Druckgradienten in x -Richtung und betrachten den Druck zunächst als gegeben (bekannter Quellterm).

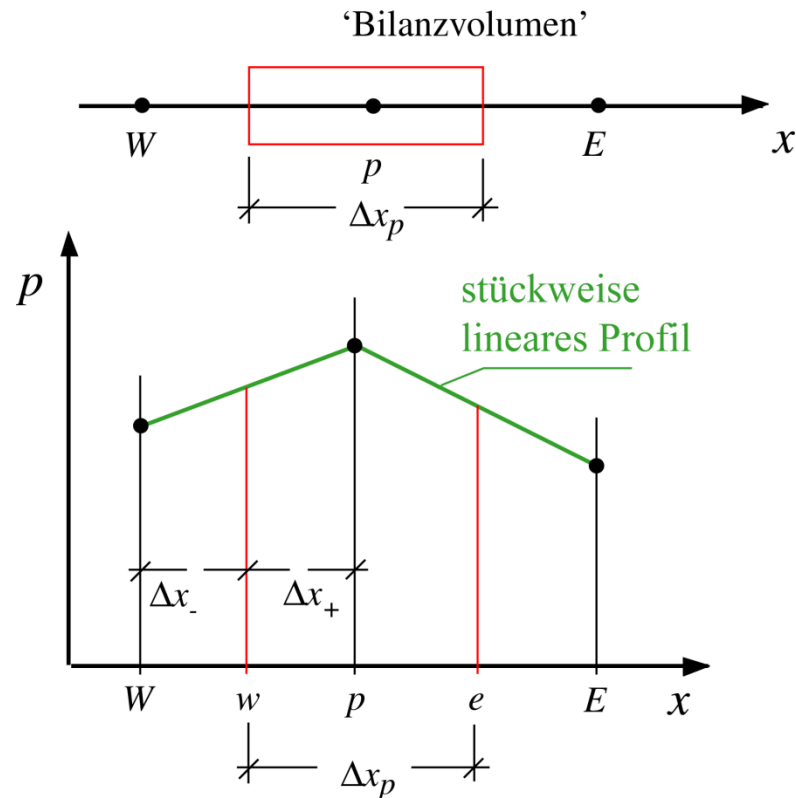
Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Diskretisierung des Druckgradienten

Falls die Zellflächen mittig zwischen den Gitterpunkten liegen, ergibt sich:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\frac{p_W + p_p}{2} - \frac{p_p + p_E}{2}}{\Delta x_p} = \frac{p_W - p_E}{2\Delta x_p}$$

Damit enthält die Impulsgleichung die Druckwerte nicht an benachbarten Gitterpunkten, sondern von weiter auseinander liegenden.



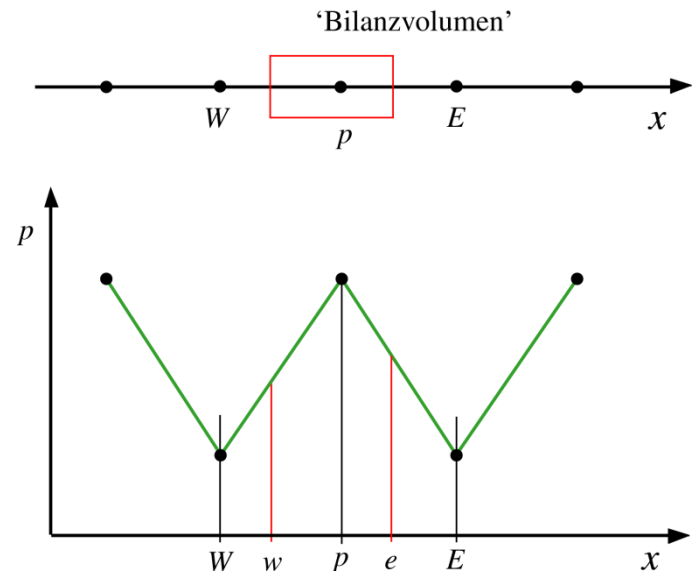
Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Der Druck wird sozusagen auf einem größeren Gitter bestimmt.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_W - p_E}{2\Delta x_p}$$

Aber schwerwiegender: **Die Druckwerte von benachbarten Gitterpunkten entkoppeln.**

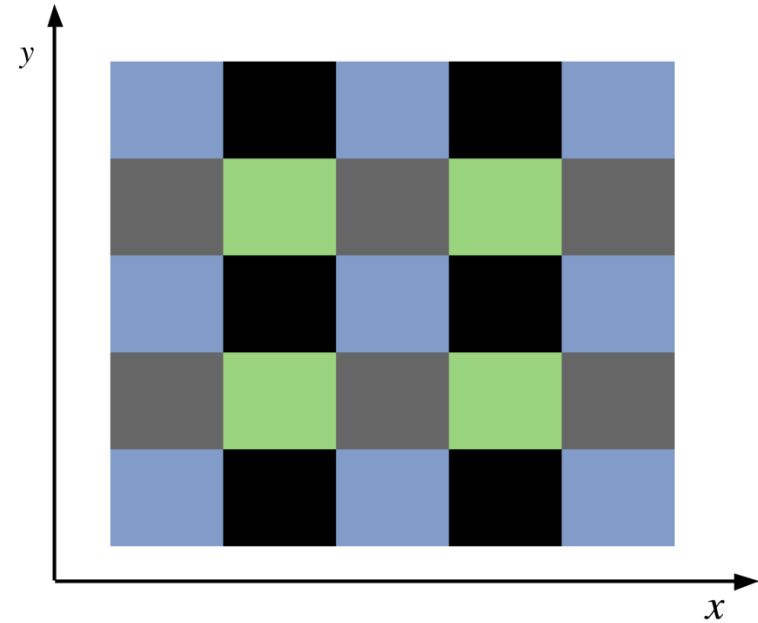
Damit sind die Gradienten in der dargestellten Zick-Zack-Verteilung des Druckes für die diskrete Bilanz nicht sichtbar und hätten keine Auswirkung auf das numerisch berechnete Geschwindigkeitsfeld.



Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Für mehrdimensionale Probleme sind vielfältige schachbrettartige Druckverteilungen, wie im Bild angedeutet, möglich, ohne dass dadurch ein Geschwindigkeitsfeld angeregt würde.

Solche Lösungen sind zwangsweise unphysikalisch und nicht als gute Lösung der Differentialgleichung akzeptierbar.



Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Exkurs: Numerische Darstellung der Kontinuitäts-Gleichung

Entsprechende unangenehme Eigenschaften zeigt auch die diskrete Kontinuitäts-Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_e - u_w = 0$$

Bei stückweise linearen Profilen ergibt sich:

$$\frac{u_E + u_p}{2} - \frac{u_p + u_W}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_E - u_W = 0$$

Auch hier **entkoppeln die benachbarten Geschwindigkeitswerte**. Die numerische Lösung lässt wie beim Druck unphysikalische Zick-Zack-Profile gelten.

Bevor eine numerische Lösung des Geschwindigkeitsfeldes angegangen werden kann, müssen diese Schwierigkeiten beseitigt werden.

Ein Heilmittel: [das versetzte Gitter](#)

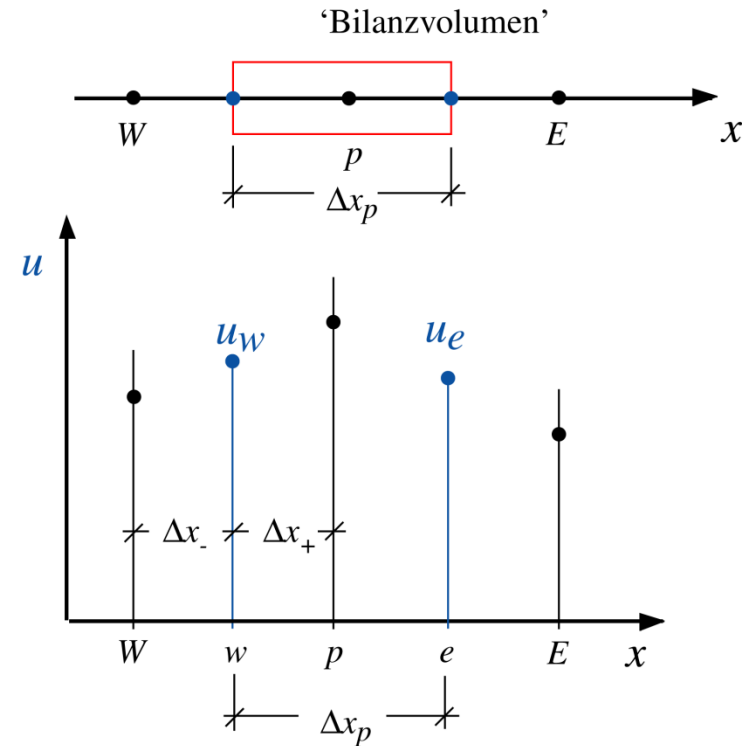
([engl. staggered grid](#))

Wir sind gar nicht gezwungen alle Variablen am gleichen Gitterpunkt anzulegen.

Für jede Variable könnte ein anderes Gitter Verwendung finden.

Es bietet sich an, die Geschwindigkeiten nicht in den Zellzentren bei p , sondern direkt

auf den Zellflächen w bzw. e zu definieren, weil ja gerade dort die Flüsse gebildet werden müssen und wichtiger, weil dann die beschriebenen Schwierigkeiten bei der Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung unmittelbar verschwinden.

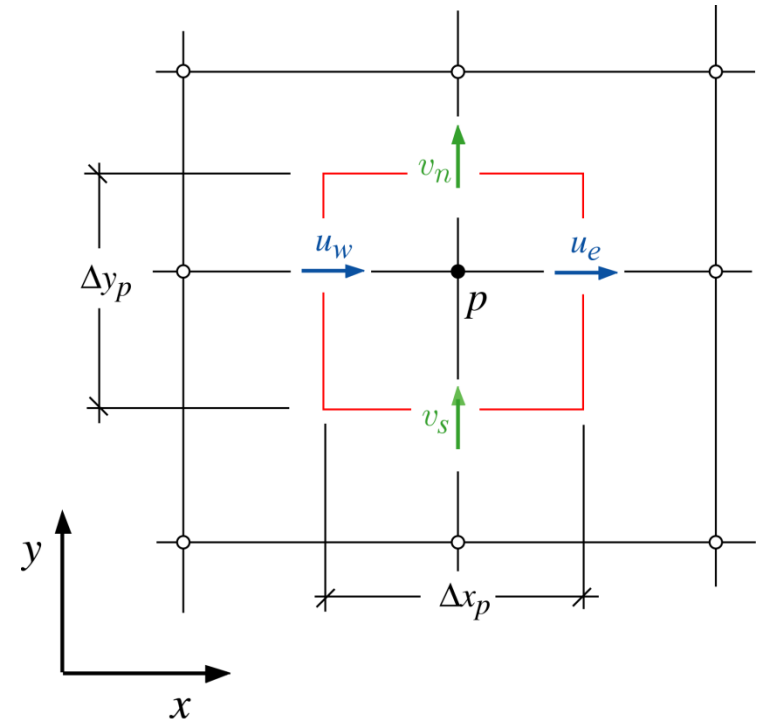


$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_e - u_w = 0$$

Das versetzte Gitter in zwei und mehr

Dimensionen

Die Definitionsorte der u -Komponente der Geschwindigkeit ist in Bezug auf die Gitterpunkte p für die Bilanzzelle in x -Richtung (blau) verschoben, entsprechend ist der Definitionsort der v -Komponente der Geschwindigkeit in y -Richtung (grün) verschoben definiert.



Unabhängig davon, ob die Bilanzflächen mittig zwischen den Gitterpunkten liegen, werden die Geschwindigkeiten auf diesen Bilanzflächen definiert.

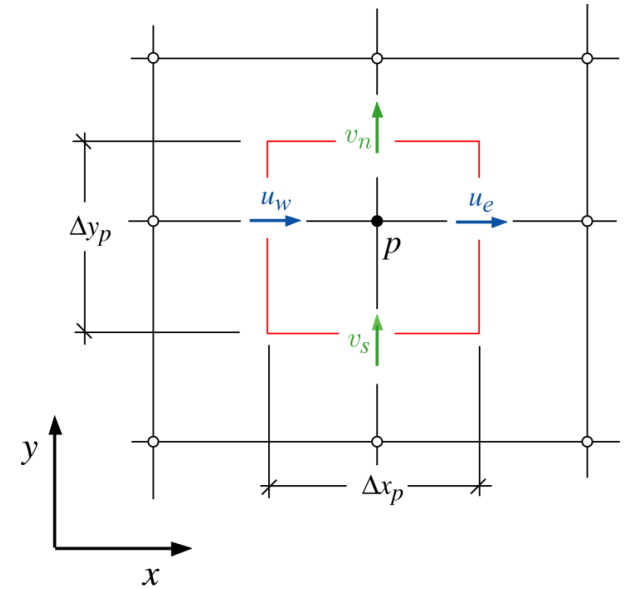
Entsprechend wird in drei Dimensionen vorgegangen.

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes (Forts.)

Bestimmung des Massenflusses

Mit dieser Definition kann der Massenfluss über die Oberfläche ohne jegliche Interpolation angegeben werden. Es gilt ganz einfach:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad (u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j})\Delta y_j + (v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2})\Delta x_i = 0$$



Der Hauptvorteil ist: Benachbarte Gitterpunkte werden zur Diskretisierung der Kontinuitäts-Gleichung benutzt. Der Zick-Zack-Effekt ist nicht mehr möglich.

Analoges folgt für den Druck: Wird der Druck ebenfalls auf den Bilanzflächen definiert, so folgt die das Geschwindigkeitsfeld treibende Druckdifferenz sofort aus dem Druckunterschied an den beiden Zellgrenzen.

Die Impulsgleichungen

Erinnerung:

Die Impulsgleichung hat dieselbe Struktur wie unsere Modellgleichung für den konvektiv-diffusen Transport eines Skalars, wobei der Druckgradient als Quellterm fungiert.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{mit} \quad \phi_x = \rho u u - \eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ist das Druckfeld gegeben, kann für das Geschwindigkeitsfeld gelöst werden.

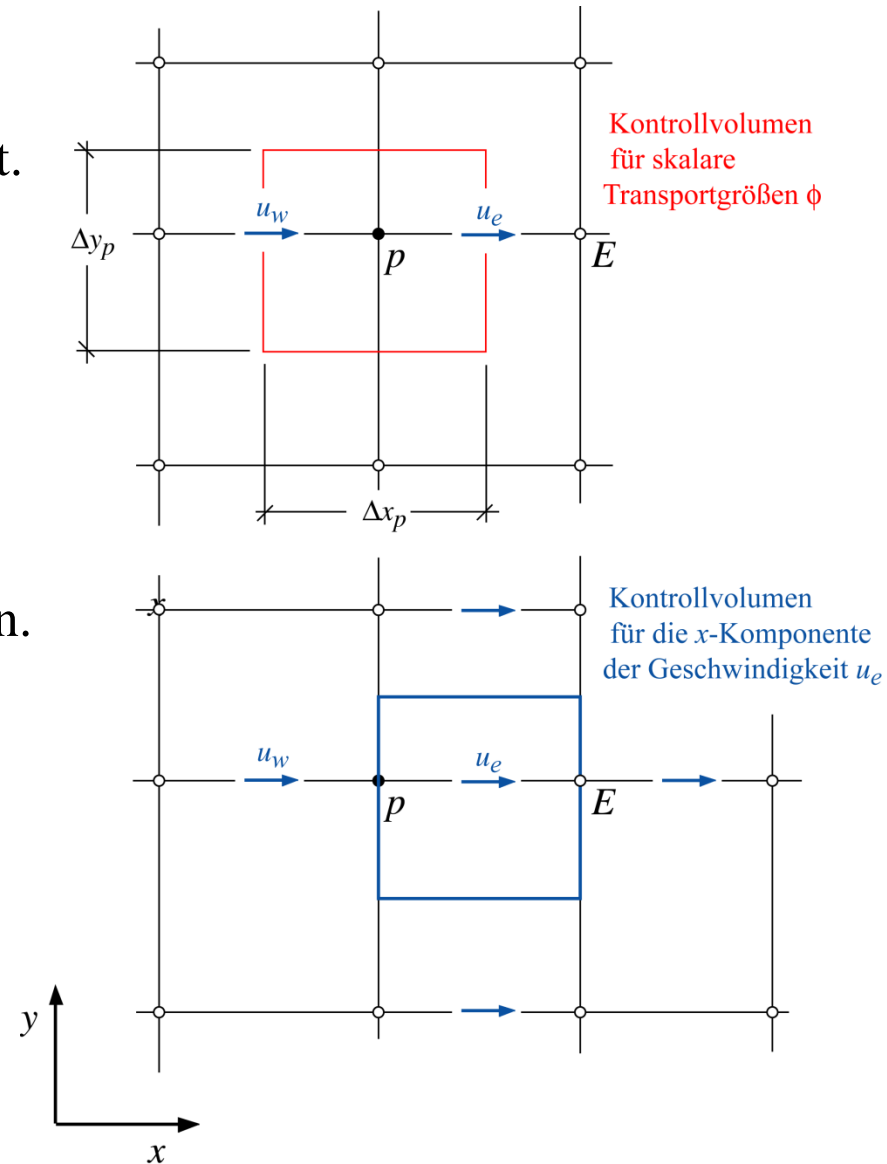
Die Einführung des versetzten Gitters macht die Behandlung aber in einigen Punkten anders, da die gesuchte abhängige Variable u jetzt nicht mehr in den Zellzentren sondern auf den Grenzen des Kontrollvolumens definiert ist.

Die Impulsgleichungen (Forts.)

Nebenstehend ist das Kontrollvolumen (blau) für die Impulsgleichung in x -Richtung gezeigt.

Die Definitionsorte der u -Komponente der Geschwindigkeit sind in Bezug auf die Gitterpunkte p in x -Richtung verschoben, entsprechend ist das Kontrollvolumen (blau) für die Impulsbilanz in x -Richtung verschoben.

Der Druck bleibt an den Punkten p und E definiert kann unmittelbar zur Formulierung der resultierenden Druckkraft auf das Kontrollvolumen der Impulsbilanz (blau) herangezogen werden (der entscheidende Vorteil des versetzten Gitters).



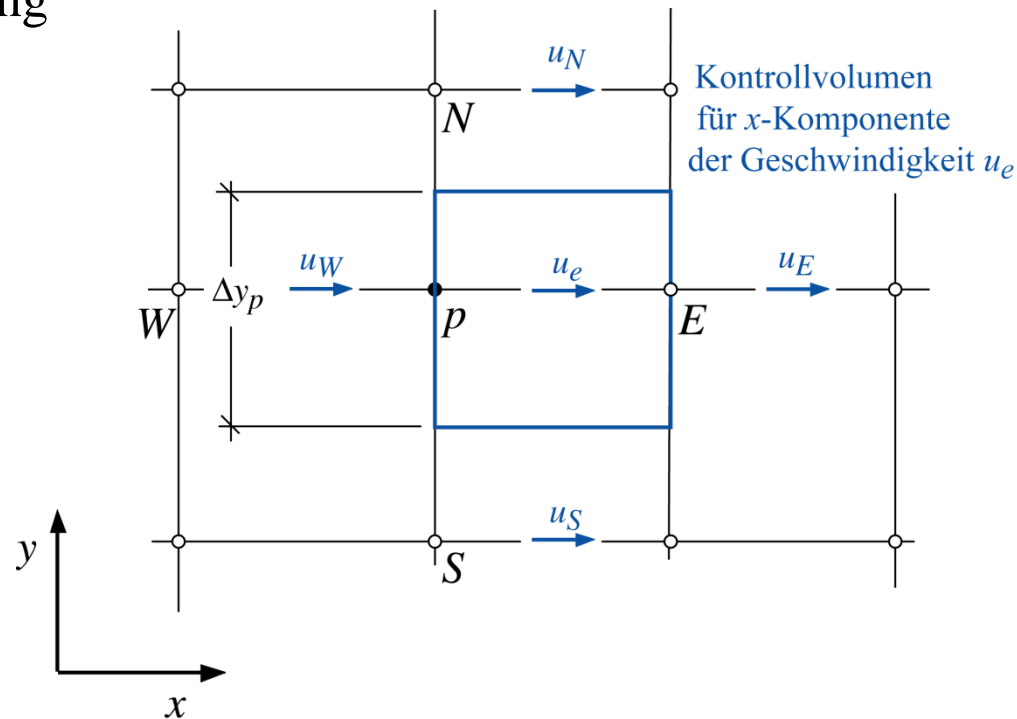
Die Impulsgleichungen (Forts.)

Die entsprechende diskrete Formulierung für die zweidimensionale, instationäre Impulsgleichung in x -Richtung lautet:

$$\tilde{a}_p u_e^{\nu+1} = a_E u_E^\nu + a_W u_W^\nu + a_N u_N^\nu + a_S u_S^\nu + b + \frac{p_p - p_E}{\Delta x_p} \Delta x_p \Delta y_p$$

Gegenüber der bekannten Diskretisierung ist hier der diskretisierte Druckterm als Quellterm neu.

Bei gegebenem Druckfeld kann obige Gleichung zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponente u in x -Richtung ausgewertet werden.



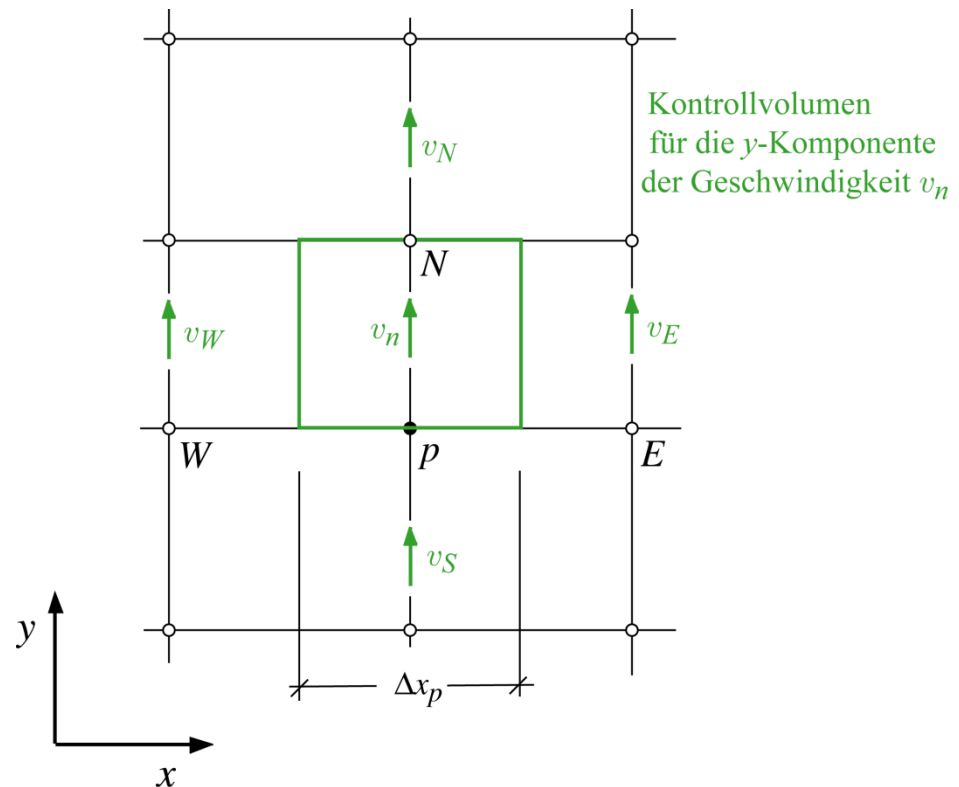
Die Impulsgleichungen (Forts.)

Die entsprechende diskrete Formulierung für die zweidimensionale Impulsgleichung in y -Richtung lautet:

$$\tilde{a}_p v_n^{\nu+1} = a_E v_E^\nu + a_W v_W^\nu + a_N v_N^\nu + a_S v_S^\nu + b + \frac{p_p - p_N}{\Delta y_p} \Delta x_p \Delta y_p$$

Das zugehörige Kontrollvolumen ist nun in y -Richtung versetzt, wie in der Skizze dargestellt, und die resultierende Druckkraft in y -Richtung geht ein.

Bei gegebenem Druckfeld kann obige Gleichung zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponente v in y -Richtung ausgewertet werden.



Zusammenfassend:

Anordnung der Bilanzvolumen für die numerische Integration der Erhaltungsgleichungen für skalare Felder und den Impuls in zwei Dimensionen

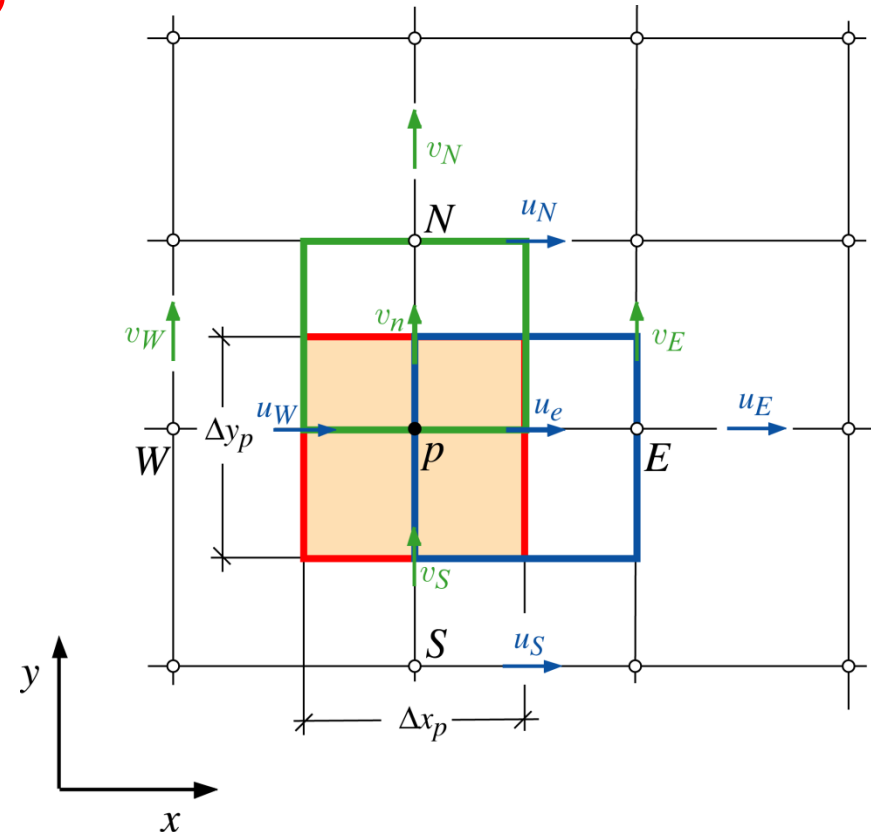
Bilanz für einen Skalar: Kontrollvolumen (rot)

Bilanz für den x -Impuls:

Kontrollvolumen (blau) zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponente u_e an der östlichen Kontrollfläche des blauen Kontrollvolumens

Bilanz für den y -Impuls:

Kontrollvolumen (grün) zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponente v_n an der nördlichen Kontrollfläche des blauen Kontrollvolumens



4. Praktikumsaufgabe:

- a) Formulieren Sie die Finite-Volumen-Bilanz für die Impulsgleichung in zwei Dimensionen

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \text{div}\vec{F} = -\text{grad } p \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u u - \eta \partial u / \partial x & \rho v u - \eta \partial u / \partial y \\ \rho u v - \eta \partial v / \partial x & \rho v v - \eta \partial v / \partial y \end{pmatrix}$$

auf einem nichtäquidistanten kartesischen Gitter, wobei der Druck und die Geschwindigkeitskomponenten auf versetzten Gittern angeordnet sein sollen!

- b) Implementieren sie einen geeigneten Algorithmus zur numerischen Integration der Impulsgleichung, indem Sie die in der 3. Praktikumsaufgabe erarbeitete Programmpaket nutzen und passend ergänzen!
- c) Überlegen Sie sich geeignete Testprobleme für eindimensionale und zweidimensionale reibungsbehaftete Strömungen, von denen eine analytische Lösung angegeben werden kann!
- d) Evaluieren Sie Ihre Programm anhand dieser Testprobleme!