

Simulationstechnik V

Vorlesung/Praktikum an der RWTH Aachen

Numerische Simulation von Strömungsvorgängen

B. Binninger

Institut für Technische Verbrennung

Templergraben 64

7. Teil

Die Impulsgleichungen (Forts.)

Die Schwierigkeit, die bisher ausgeblendet wurde, ist, dass das Druckfeld noch nicht bekannt ist.

Druckfeld und Geschwindigkeitsfeld sind miteinander gekoppelt.

Einzig bisher nicht berücksichtigte Gleichung: **Kontinuitäts-Gleichung**

Zielsetzung:

Die Kontinuitäts-Gleichung soll für einen direkten Algorithmus zur Berechnung des Druckfeldes umformuliert werden.

Dies gelingt nach der Formulierung der entsprechenden Druckgleichung in einem **iterativen** Prozess zwischen Druck- und Geschwindigkeitsfeld.

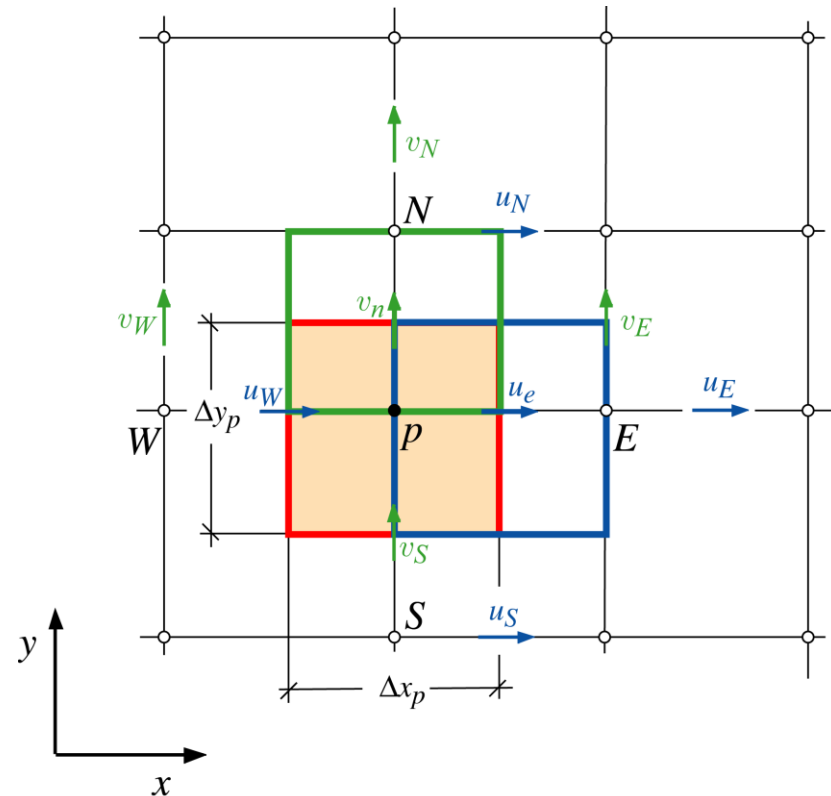
Die Impulsgleichungen (Forts.)

Bei korrektem Druckfeld gelten folgende algebraische Gleichungen für kartesische Koordinatensysteme in 3 Dimensionen (vergl. Abschnitte 5&6):

$$\tilde{a}_e u_e = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_E) A_e$$

$$\tilde{a}_n v_n = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b + (p_P - p_N) A_n$$

$$\tilde{a}_t w_t = \sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b + (p_P - p_T) A_t$$



Die Anzahl der Nachbarpunkte \sum_{nb} hängt dabei von der Dimensionalität des Problems und vom Diskretisierungsverfahren ab.

Die Impulsgleichungen (Forts.)

Zunächst formulieren wir die diskreten Gleichungen für *vorläufige* Geschwindigkeits- und Druckfelder (Index *), die noch einen Fehler in der Kontinuitäts-Gleichung beinhalten.

Es gilt:

$$(7.1-1) \quad \tilde{a}_e u_e^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e$$

$$(7.1-2) \quad \tilde{a}_n v_n^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_P^* - p_N^*) A_n$$

$$(7.1-3) \quad \tilde{a}_t w_t^* = \sum_{nb} a_{nb} w_{nb}^* + b + (p_P^* - p_T^*) A_t$$

Im Sinne einer korrekten Lösung, die auch die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt, sind die richtigen Geschwindigkeiten und der richtige Druck durch *Korrekturen* (Index ') zu ergänzen:

$$p = p^* + p' \quad (7.2-1)$$

$$u = u^* + u', \quad v = v^* + v', \quad w = w^* + w', \quad (7.2-2)$$

Differenzen der vorstehenden Gleichungen am Beispiel der x -Impulsgleichung:

$$\tilde{a}_e u_e = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_E) A_e$$

$$\tilde{a}_e u_e^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e$$

$$\Delta : \tilde{a}_e u_e' = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}' + (p_P' - p_E') A_e$$

(analog für die anderen Koordinatenrichtungen)

Durch die Summen koppeln alle Korrekturen von allen Gitterpunkten

→ implizites Gleichungssystem für die Korrekturgrößen

Die Impulsgleichungen (Forts.)

Um einfach verwertbare Gleichungen für die Korrekturgeschwindigkeiten zu haben, werden die Summen über die benachbarten Punkte fallengelassen

$$\tilde{a}_e u'_e = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} + (p'_P - p'_e) A_E$$

→ Iteration von Druckkorrektur und Geschwindigkeitsfeld merzt diesen Fehler aus:

$$u'_e = (p'_P - p'_E) A_e / \tilde{a}_e$$

$$v'_n = (p'_P - p'_N) A_n / \tilde{a}_n$$

$$w'_t = (p'_P - p'_T) A_t / \tilde{a}_t$$

Die Machbarkeit und die Auswirkungen dieses Vorgehens wird später diskutiert (siehe 7.13 ff).

Die Impulsgleichungen (Forts.)

Mit diesen Geschwindigkeitskorrekturgrößen können die geschätzten Geschwindigkeitskomponenten korrigiert werden:

$$u_e = u_e^* + (p'_P - p'_E) A_e / \tilde{a}_e \quad (7.3-1)$$

$$v_n = v_n^* + (p'_P - p'_N) A_n / \tilde{a}_n \quad (7.3-2)$$

$$w_t = w_t^* + (p'_P - p'_T) A_t / \tilde{a}_t \quad (7.3-3)$$

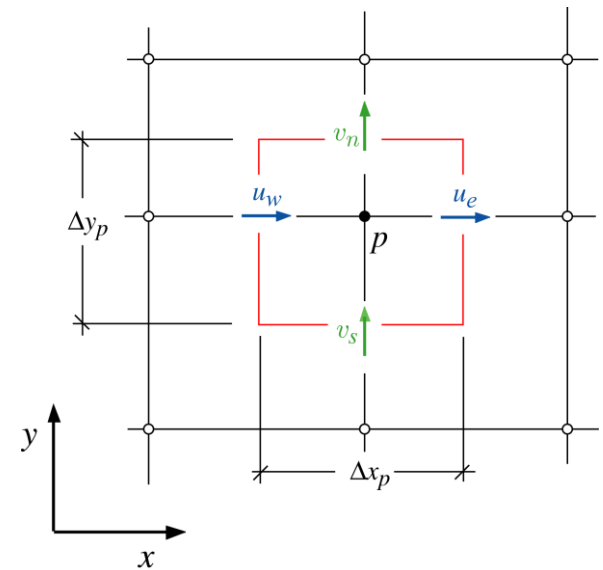
Noch unbekannt: **die Druckkorrektur p'**

Jetzt kommt die **Kontinuitäts-Gleichung** ins Spiel!

Kontinuitäts-Gleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

Die finite Volumenbilanz am Kontrollvolumen liefert¹⁾:



$$\left(\rho_P^{\nu+1} - \rho_P^\nu\right) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t = - \left((\rho u A)_e - (\rho u A)_w \right) - \left((\rho v A)_n - (\rho v A)_s \right) - \left((\rho w A)_t - (\rho w A)_b \right)$$

Durch den Ansatz mit versetzten Gittern sind die Geschwindigkeiten für diese Bilanz bereits passend an den Kontrollflächen lokalisiert.

Bei der Diskretisierung tritt keine Entkopplung benachbarter Gitterpunkte auf.

¹⁾ Die $(\dots)_w$ bedeutet, dass alle Größen am Face w gemeint sind (für die anderen Faces analog).

Die Druck-Korrekturgleichung (Forts.)

In diese diskretisierte Kontinuitäts-Gleichung

$$\left(\rho_P^{\nu+1} - \rho_P^{\nu}\right) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t = -\left((\rho u A)_e - (\rho u A)_w\right) - \left((\rho v A)_n - (\rho v A)_s\right) - \left((\rho w A)_t - (\rho w A)_b\right)$$

werden die Geschwindigkeits-Korrekturgleichungen

$$u_e = u_e^* + (p'_P - p'_E) A_e / \tilde{a}_e \quad (7.3-1)$$

$$v_n = v_n^* + (p'_P - p'_N) A_n / \tilde{a}_n \quad (7.3-2)$$

$$w_t = w_t^* + (p'_P - p'_T) A_t / \tilde{a}_t \quad (7.3-3)$$

eingesetzt.

Die Druck-Korrekturgleichung (Forts.)

Man erhält die Druck-Korrekturgleichung

$$\tilde{a}_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_T p'_T + a_B p'_B + b \quad (7.4)$$

mit

$$a_E = (\rho A/\tilde{a})_e \Delta y \Delta z, \quad a_W = (\rho A/\tilde{a})_w \Delta y \Delta z,$$

$$a_N = (\rho A/\tilde{a})_n \Delta x \Delta z, \quad a_S = (\rho A/\tilde{a})_s \Delta x \Delta z,$$

$$a_T = (\rho A/\tilde{a})_t \Delta x \Delta y, \quad a_B = (\rho A/\tilde{a})_b \Delta x \Delta y,$$

$$\tilde{a}_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B$$

$$b = \left(\rho_P^\nu - \rho_P^{\nu+1} \right) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t + \left((\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e \right) + \\ \left((\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n \right) + \left((\rho w^* A)_b - (\rho w^* A)_t \right)$$

Die Druck-Korrekturgleichung (Forts.)

Die darin auftretenden Dichten

$$\rho_e, \rho_w, \rho_n, \rho_s, \rho_t, \rho_b$$

sind bei kompressibler Strömung aus den an den Zellzentren gespeicherten Dichten geeignet auf den Zwischengitterpunkte zu interpolieren.

Dabei ist darauf zu achten, dass die interpolierten Dichten an den korrespondierenden Zellflächen benachbarter Kontrollvolumen konsistent formuliert sind!

Die Druck-Korrekturgleichung (Forts.)

Der Term

$$b = \left(\rho_P^\nu - \rho_P^{\nu+1} \right) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t + \left((\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e \right) + \left((\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n \right) + \left((\rho w^* A)_b - (\rho w^* A)_t \right) \quad (7.6)$$

entpuppt sich als das Negative der diskreten Kontinuitäts-Gleichung

$$\left(\rho_P^{\nu+1} - \rho_P^\nu \right) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t + \left((\rho u A)_e - (\rho u A)_w \right) + \left((\rho v A)_n - (\rho v A)_s \right) + \left((\rho w A)_t - (\rho w A)_b \right) = 0$$

in den *geschätzten* Geschwindigkeiten

Das bedeutet:

Wird (ist) $b = 0$, dann erfüllen die geschätzten Geschwindigkeiten bereits die Kontinuitäts-Gleichung; keine Druckkorrektur ist notwendig. Der Term b repräsentiert einen „Massen-Quellterm“, der durch die Druckkorrektur und die angeschlossene Geschwindigkeitskorrektur iterativ zum Verschwinden gebracht werden muss.

1. Schätze des Druckfeld p^*
2. Löse die Impulsgleichungen zur Bestimmung der geschätzten Geschwindigkeitskomponenten u^* , v^* und w^* [Glg: (7.1-1) bis (7.1-3)]
3. Löse die Druckkorrektur-Gleichung für p' [Glg: (7.4)]
4. Berechne den Druck aus $p = p^* + p'$ [Glg: (7.2)]
5. Berechne die Geschwindigkeitskomponenten aus den geschätzten und der Druckkorrektur [Glg: (7.3-1) bis (7.3-3)]
6. Löse die Transportgleichung für andere skalare Feldgrößen mit dem bekannten Geschwindigkeitsfeld, falls diese Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld ausüben. (Fehlt dieser Einfluss, kann das Geschwindigkeitsfeld zuerst zur Konvergenz gebracht werden und die Skalare anschließend berechnet werden.)
7. Nutze den korrigierten Druck als neue Schätzung und wiederhole die genannten Schritte bis eine konvergente Lösung erreicht ist.

Der Algorithmus: SIMPLE, Liste der Gleichungen

$$(7.1-1) \quad \tilde{a}_e u_e^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e$$

$$(7.1-2) \quad \tilde{a}_n v_n^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_P^* - p_N^*) A_n$$

$$(7.1-3) \quad \tilde{a}_t w_t^* = \sum_{nb} a_{nb} w_{nb}^* + b + (p_P^* - p_T^*) A_t$$

$$\tilde{a}_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_T p'_T + a_B p'_B + b \quad (7.4)$$

mit

$$b = \left(\rho_P^\nu - \rho_P^{\nu+1} \right) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t + \left((\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e \right) + \left((\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n \right) + \left((\rho w^* A)_b - (\rho w^* A)_t \right)$$

$$p = p^* + p' \quad (7.2-1)$$

$$u_e = u_e^* + (p'_P - p'_E) A_e / \tilde{a}_e \quad (7.3-1)$$

$$v_n = v_n^* + (p'_P - p'_N) A_n / \tilde{a}_n \quad (7.3-2)$$

$$w_t = w_t^* + (p'_P - p'_T) A_t / \tilde{a}_t \quad (7.3-3)$$

Diskussion der Korrekturgleichungen

Die korrekte Gleichung für die Geschwindigkeitskorrektur

$$\tilde{a}_e u'_e = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} + (p'_P - p'_e) A_E$$

haben wir vereinfacht, indem die Summe über benachbarte Gitterpunkte fortgelassen wurde.

Korrekturgleichung für die Geschwindigkeitskomponenten lautete damit:

$$u'_e = (p'_P - p'_E) A_e / \tilde{a}_e$$

Wir wollen uns davon überzeugen, welchen Vorteil dieses Vorgehen bietet und dass dadurch kein Einfluss auf das Endergebnis der Geschwindigkeitsberechnung entsteht.

Vorteil:

Würde die Summe beibehalten werden, müssten zur Berechnung die Geschwindigkeitskorrekturen an Nachbarpunkten berücksichtigt werden, die wieder ihre Nachbarn ins Spiel bringen und so weiter.

Im Endeffekt würde die Gleichung der Geschwindigkeitskorrektur alle Druckkorrekturen an allen benachbarten Punkten heranziehen.

Die resultierende Gleichung ist nicht effektiv lösbar; das resultierende Verfahren liefere auf eine **direkte** Lösung der Kontinuitäts- und Impulsgleichungen hinaus. Ein Vorgehen, was nicht Ziel einer numerischen Methode sein kann.

Das Fallenlassen des Terms liefert eine **explizite** Gleichung für die Druckkorrektur in der gewohnten algebraischen Form. Deswegen die Bezeichnung „**semi-impl.** Verf.“

Diskussion der Korrekturgleichung (Forts.)

Die Vernachlässigung einer solchen Terms wäre natürlich unakzeptierbar, wenn dadurch die Lösung geändert wurde.

Eine *konvergierte* Lösung ($b=0$) wird jedoch keinen Fehler durch Fortlassen dieses Terms enthalten.

Denn: Die *konvergierte* Lösung besitzt ein Druckfeld in der Art, dass das korrespondierende Geschwindigkeitsfeld die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt.

Die Feinheiten bei der Konstruktion der Druck-Korrekturgleichung spielen also letztlich keine Rolle, solange nur das Verfahren konvergiert.

Diskussion der Druck-Korrekturgleichung (Forts.)

Um dies einzusehen, ist es sinnvoll den letzten Iterationsschritt zu betrachten, bevor die Lösung als konvergiert deklariert wird.

Als Ergebnis aller vorhergehenden Iterationen haben wir also ein Druckfeld p^* erhalten, mit dem wir die Impulsgleichungen lösen, um u^* , v^* und w^* zu erhalten.

Aus diesen Geschwindigkeitsdaten berechnen wir die Massenquelle b in der Druck-Korrekturgleichung (7.4).

Da dies nun die endgültige Gleichung sein soll, wird die Massenquelle b praktisch zu Null für alle Kontrollvolumina im Integrationsgebiet. Damit wird auch die Druckkorrektur im gesamten Integrationsgebiet Null: $p' = 0$.

Dies bedeutet, dass der errechnete Druck p^* und die Geschwindigkeitskomponenten u^* , v^* , w^* , die korrekten Werte angenommen haben.

Damit ist auch klar, dass die Massenquelle b ein nützlicher Indikator für die Konvergenz des Verfahrens darstellt.

Die Iteration innerhalb eines Zeitschritts des instationären Verfahrens wird solange durchgeführt, bis die Massenquelle b im gesamten Integrationsgebiet unter einen genügend kleinen Wert gefallen ist.

Die Druckkorrektur kann als vorübergehender Algorithmus angesehen werden, der die Konvergenz zum korrekten Druckfeld bewirkt.

Daraus schließen wir, dass jede Gleichung für die Druck-Korrektur akzeptabel ist, die eine Konvergenz des Verfahrens insgesamt bewirkt.

Nur die Konvergenzrate wird von der genauen Formulierung der Korrekturgleichung abhängen.

Diskussion der Druck-Korrekturgleichung (Forts.)

Bei der Ableitung der Druck-Korrekturgleichung ist ein etwaiger Einfluss des Druckes auf die Dichte (Zustandsgleichung) nicht berücksichtigt worden, indem diese als konstant angenommen wurde.

Dies kann als eine weitere Vereinfachung der Druck-Korrekturgleichung angesehen und mit gleichen Argumenten wie andere Vereinfachungen gerechtfertigt werden.

Bemerkung:

Für stark kompressible Strömungen (große Mach-Zahlen, insbesondere Überschall) ist die Abhängigkeit der Dichte vom Druck jedoch so signifikant, dass eine kompressible Version der Druck-Korrekturgleichung vorzusehen ist.

Unterrelaxation der Druck-Korrektur

In der Praxis hat sich gezeigt, dass die Druck-Korrekturgleichung oft Ursache für ein divergentes Verhalten des Verfahren.

Im Sinne der Beliebigkeit der Druck-Korrekturgleichung wird deshalb oft von einer **Unterrelaxation der Druckkorrektur** Gebrauch gemacht:

$$p = p^* + \omega p' \quad \text{mit} \quad 0 \leq \omega \leq 1$$

Typische Werte für den Relaxationsparameter ω sind 0,8.

Einen optimalen Wert zu finden ist problemabhängig; es kann kein allgemein verbindlicher Wert angegeben werden, mit dem optimale Konvergenz in jedem Fall erzielt werden kann.

Diskussion der Druck-Korrekturgleichung (Forts.)

Hinsichtlich der Unterrelaxation soll noch folgendes betont werden:

Der SIMPLE-Algorithmus ist so konstruiert, dass zu dem angenommenen Druckfeld jedes Iterationsschrittes ein in dem Sinne „passendes“ Geschwindigkeitsfeld berechnet wird, welches die diskrete Kontinuitäts-Gleichung erfüllt (unabhängig davon, ob das Druckfeld das endgültige korrekte Druckfeld ist oder nicht).

Eine Unterrelaxation der Druck-Korrektur hilft die Massenquelle b klein zu halten, so dass auch die Korrektur des Geschwindigkeitsfeldes klein bleibt.

Der Transport passiver Strömungsgrößen erfolgt daher immer mit einem Geschwindigkeitsfeld, welches die Kontinuitäts-Gleichung erfüllt.

Eine Unterrelaxation der Geschwindigkeitskomponente ist dagegen **nicht** wünschenswert, da dann diese positive Eigenschaft des Algorithmus zerstört wird.