

Simulationstechnik V

Vorlesung/Praktikum an der RWTH Aachen

Numerische Simulation von Strömungsvorgängen

B. Binninger

Institut für Technische Verbrennung

Templergraben 64

8. Teil

Randbedingungen für die Konvektions-Diffusions-Gleichung

Bei der Diffusionsgleichung sind zentrale Differenzen zur Diskretisierung der Differentiale angemessen.

- Diffusion → jede Raumrichtung gleichwertig

Beim konvektiven Transport bestimmt die Strömungsrichtung den Transport

- Konvektion → stromauf gelegene Größen bestimmen den Wert stromab

Der Koeffizient der stromab liegenden Variable in der algebraischen Gleichung muss daher kleiner werden. Damit wird die Raumdiskretisierung vom Charakter her **eindimensional** ähnlich wie die Zeitkoordinate (die Zukunft hängt von der Vergangenheit ab und nicht umgekehrt).

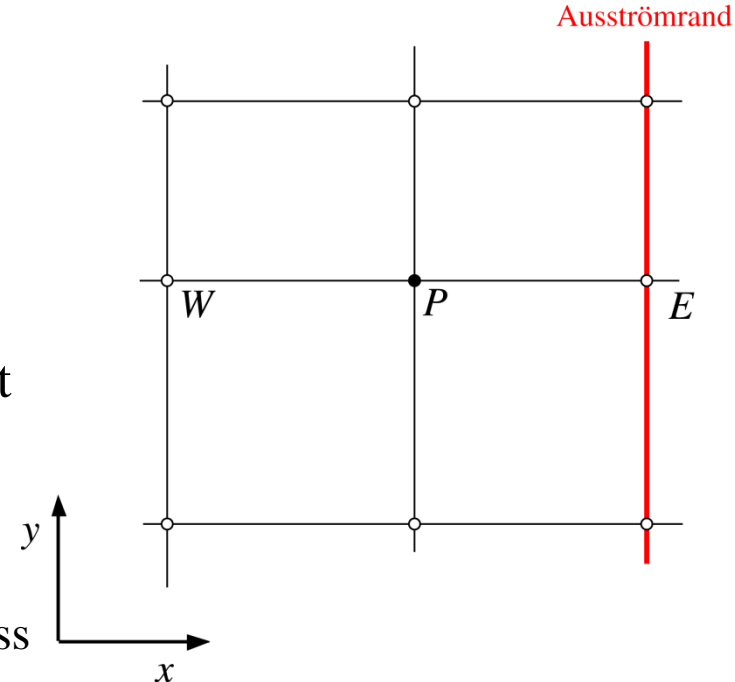
Randbedingungen für die Konvektions-Diffusions-Gleichung (Forts.)

Entsprechend dieser Überlegung werden Einströmränder anders als Ausströmränder behandelt.

Ausströmrand:

Der Wert der abhängigen Variable wird vom Wert innerhalb des Strömungsfeldes bestimmt. Daher weiß man bei der numerischen Berechnung weder den Wert der abhängigen Variable noch ihren Fluss am Ausströmrand

Beispiel: Temperatur am Ausströmrand oder den Wärmefluss über den Rand.



Ist die Peclet-Zahl positiv und hinreichend groß, wird der Koeffizient a_E in der algebraischen Gleichung nahezu null. Es wird überhaupt kein Randwert gebraucht oder jede Setzung eines Randwertes ist ohne großen Einfluss auf die Lösung.

Randbedingungen für die Konvektions-Diffusions-Gleichung (Forts.)

In Ermangelung besserer Randwerte müssen wir auch für endliche positive Peclet-Zahlen von dieser Erkenntnis Gebrauch machen.

Man wird im Allgemeinen den diffusiven Fluss der abhängigen Variable über den Rand zu null setzen, das heißt, den Wert aus dem Strömungsfeld auf den Ausströmrand mit verschwindendem Gradienten extrapolieren (kein Einfluss von Außen).

In speziellen Fällen wird man auch den Gradienten kennen und damit einen endlichen Fluss vorgeben können.

Randbedingungen für die Konvektions-Diffusions-Gleichung (Forts.)

Die mit dieser Vorgabe verbundene Ungenauigkeit für endliche Peclet-Zahlen ist der Preis dafür, dass wir für die numerische Lösung im Allgemeinen auf einem endlichen Integrationsgebiet arbeiten müssen, also nur einen Ausschnitt aus der Wirklichkeit betrachten können.

Umgekehrt kann argumentiert werden, dass die Festlegung des Integrationsgebietes also der Ort des Ausströmrandes so zu erfolgen hat, dass der vorgegebene Wert des Flusses eine gute Approximation darstellt.

Stichwort: „weit stromab von komplexen Strömungsvorgängen“.

Randbedingungen für die Konvektions-Diffusions-Gleichung (Forts.)

Einströmrand:

Am Einströmrand sind die Verhältnisse klarer.

Wir werden bei einem zu betrachtenden Problem wissen, welchen Wert die abhängige Variable am Einstromrand haben soll und diesen Wert entsprechend am Einströmrand vorschreiben.

Ist diese Vorschrift nicht angebar, handelt es sich um ein im mathematischen Sinne schlecht gestelltes Problem, im physikalischen Sinne ist die Fragestellung dann einfach nicht genügend spezifiziert.

Randbedingungen für die Druck-Korrektur

Neben den diskutierten Sachverhalten sind bei der Impulsgleichung Zusätze zu machen, die den Druck betreffen, um insbesondere die Gleichung für die Druckkorrektur formulieren zu können.

Ausströmrand:

Auf dem Rand ist der Druck gegeben, die Geschwindigkeit ist nicht bekannt.

Einströmrand:

Die Normalkomponente der Geschwindigkeit ist gegeben, aber der Druck ist nicht bekannt.

Randbedingungen für die Druck-Korrektur-Gleichung

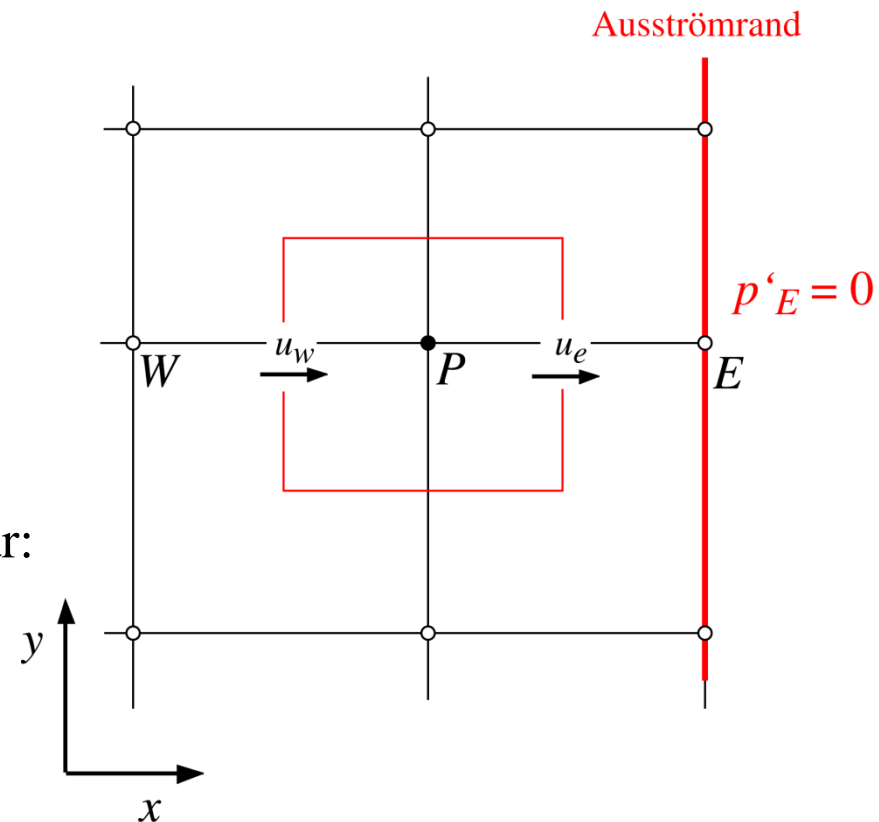
Ausströmrand bzw. vorgegebener Druck p :

Der geschätzte Druck p^* wird mit dem vorgegebenen Druck p_A gleichgesetzt:

$$p^* = p_A$$

Dann folgt für die Druckkorrektur unmittelbar:

$$p' = 0.$$



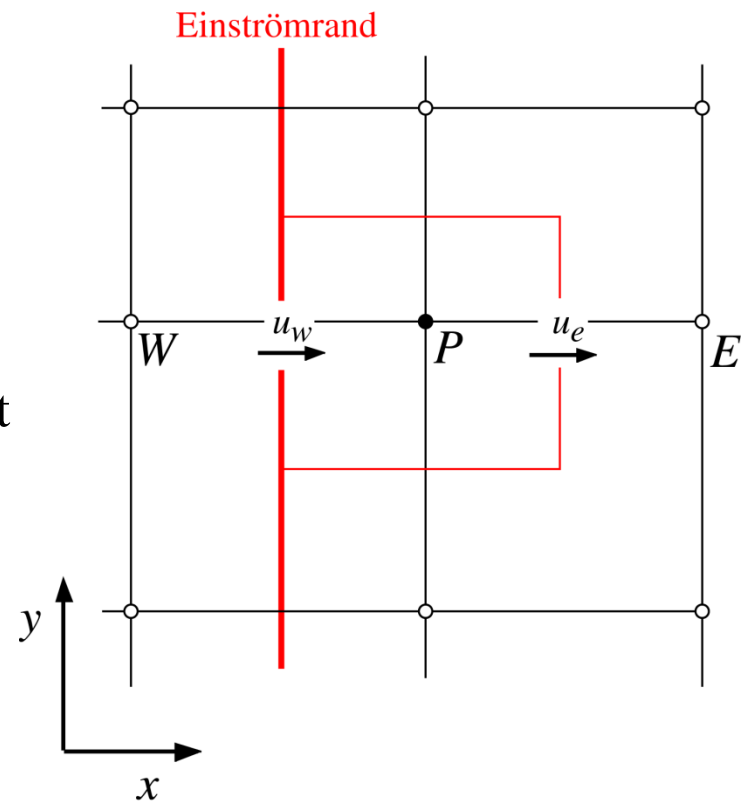
Dieser Fall ist gleichzusetzen mit dem, bei dem die abhängige Variable in der Konvektions-Diffusions-Gleichung vorgegeben ist.

Randbedingungen für die Druck-Korrektur-Gleichung (Forts.)

Einströmrand bzw. vorgegebene Normalkomponente der Geschwindigkeit:

Ist das Gitter zweckmäßigerweise so angelegt, dass der Einströmrand mit der Kontrollfläche zusammenfällt, dann liegt der skizzierte Sachverhalt vor mit gegebener Normalgeschwindigkeit u_w .

Bei der Herleitung der Druck-Korrektur-Gleichung, sollte dann der Fluss nicht mit der Geschwindigkeit u^* und einer zugehörigen Korrektur u' , sondern richtigerweise mit der vorzugebenden Geschwindigkeit u_w formuliert werden. Dann taucht p'_w in der Formulierung für den Druck p' gar nicht auf oder anders ausgedrückt, der Koeffizient a_w in der p' -Gleichung wird Null und p'_w wird nicht gebraucht.



Randbedingungen für die Druck-Korrektur-Gleichung (Forts.)

Am Einströmrand gilt:

$$\tilde{a}_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_T p'_T + a_B p'_B + b$$

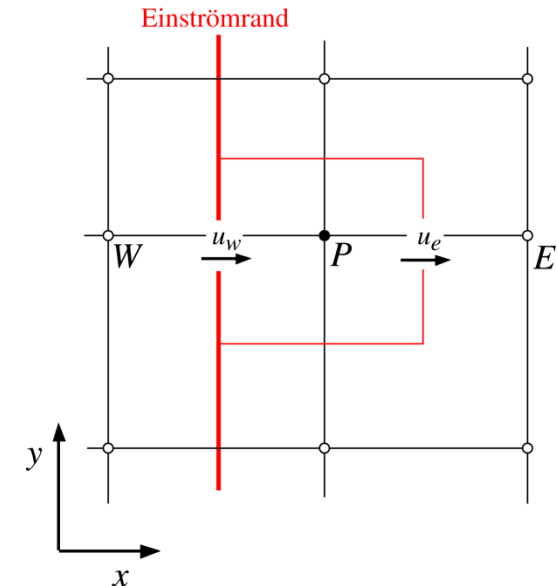
$$a_E = \rho_e A_e / \tilde{a}_e \Delta y \Delta z, \quad \underline{a_W = 0},$$

$$a_N = \rho_n A_n / \tilde{a}_n \Delta x \Delta z, \quad a_S = \rho_s A_s / \tilde{a}_s \Delta x \Delta z,$$

$$a_T = \rho_t A_t / \tilde{a}_t \Delta x \Delta y, \quad a_B = \rho_b A_b / \tilde{a}_b \Delta x \Delta y,$$

$$\tilde{a}_P = a_E + a_N + a_S + a_T + a_B$$

$$b = \left(\rho_P^\nu - \rho_P^{\nu+1} \right) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t + \left((\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e \right) + \left((\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n \right) + \left((\rho w^* A)_b - (\rho w^* A)_t \right)$$



Zur Verbesserung der Konvergenzrate wurde der SIMPLE-Algorithmus überarbeitet.

Motivation:

Bei der Herleitung der Druck-Korrekturgleichung wurde der Ausdruck

$$\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb}$$

vernachlässigt. Dies führt zu übertriebenen Druckkorrekturen, wodurch oft Unterrelaxation notwendig ist.

Ein überarbeiteter Algorithmus: SIMPLER (Forts.)

Man beobachtet:

Die Druck-Korrekturgleichung erzeugt eine recht gute Korrektur des Geschwindigkeitsfeldes, aber eine schlechte für das Druckfeld.

Diese Beobachtung legt es nahe, die Druck-Korrekturgleichung zur Verbesserung der Geschwindigkeit, nicht aber zur Bestimmung der Druck-Korrektur zu nutzen.

Es wird dann ein anderes Mittel für die Druckkorrektur benötigt.

Dies führt auf den Algorithmus **SIMPLER**.

Die Druck-Gleichung: SIMPLER

Wir schreiben die bekannte **Impulsgleichung** in der Form:

$$u_e = \frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b}{\tilde{a}_e} + (p_P - p_E) A_e / \tilde{a}_e$$

Es wird eine **Pseudo-Geschwindigkeit** definiert: $\hat{u}_e = \frac{\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b}{\tilde{a}_e}$ (8.1-1)

Diese Pseudo-Geschwindigkeit enthält die Werte des Geschwindigkeitsfeldes an den Nachbarpunkten, aber keine Werte des Druckfeldes.

Es gilt nämlich

$$u_e = \hat{u}_e + (p_P - p_E) A_e / \tilde{a}_e$$

und entsprechend:

$$v_n = \hat{v}_n + (p_P - p_N) A_n / \tilde{a}_n$$

$$w_t = \hat{w}_t + (p_P - p_T) A_t / \tilde{a}_t$$

Die Druck-Gleichung: SIMPLER (Forts.)

Wir vergleichen diese neuen Beziehungen

$$u_e = \hat{u}_e + (p_P - p_E) A_e / \tilde{a}_e$$

$$v_n = \hat{v}_n + (p_P - p_N) A_n / \tilde{a}_n$$

$$w_t = \hat{w}_t + (p_P - p_T) A_t / \tilde{a}_t$$

mit den bisher benutzten

$$u_e = u_e^* + (p'_P - p'_E) A_e / \tilde{a}_e$$

$$v_n = v_n^* + (p'_P - p'_N) A_n / \tilde{a}_n$$

$$w_t = w_t^* + (p'_P - p'_T) A_t / \tilde{a}_t$$

Es fällt auf, dass der Druck den Platz der Druck-Korrektur eingenommen hat.

Die Druck-Gleichung: SIMPLER (Forts.)

Wir ersetzen für den SIMPLER-Algorithmus die Geschwindigkeiten in der Kontinuitäts-Gleichung

$$\left(\rho_P^{\nu+1} - \rho_P^{\nu}\right) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t = -\left((\rho u A)_e - (\rho u A)_w\right) - \left((\rho v A)_n - (\rho v A)_s\right) - \left((\rho w A)_t - (\rho w A)_b\right)$$

durch diese neue Formulierung mit der Pseudo-Geschwindigkeit und dem Druckfeld und erhalten folgende Gleichung für den Druck

$$\tilde{a}_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + a_T p_T + a_B p_B + b \quad (7.4')$$

in der b nun anders als bisher durch

$$b = \left(\rho_P^{\nu} - \rho_P^{\nu+1}\right) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t + \left((\rho \hat{u} A)_w - (\rho \hat{u} A)_e\right) + \left((\rho \hat{v} A)_s - (\rho \hat{v} A)_n\right) + \left((\rho \hat{w} A)_b - (\rho \hat{w} A)_t\right) \quad (7.6')$$

bestimmt ist.

Fazit: Wird mit diesem Algorithmus gearbeitet, so ist die Vernachlässigung der Nachbargeschwindigkeiten in der Druck-Korrekturgleichung in der hier vorliegenden Gleichung für den Druck nicht mehr von Nöten.

Entsprechend tritt das Überschießen der Druckkorrektur nicht mehr auf. Falls ein korrektes Geschwindigkeitsfeld benutzt würde um die Pseudo-Geschwindigkeiten zu berechnen, würde die Druck-Gleichung direkt den richtigen Druck ergeben.

Dieses Verhalten war bei der Formulierung des Simple-Algorithmus anders. Ein korrektes Geschwindigkeitsfeld erfüllte zwar die Kontinuitätsgleichung, wegen der Vernachlässigung der Nachbargeschwindigkeiten bei der Herleitung der Korrekturgleichung wurde aber eine deutliche Druckkorrektur ermittelt, die zunächst das Geschwindigkeitsfeld störte und erst im Laufe der Iteration Geschwindigkeits- und Druckfeld aufeinander einspielte.

Die Druck-Gleichung: SIMPLER (Forts.)

Ablauf:

Der überarbeitete Algorithmus SIMPLER besteht aus der Lösung der Druck-Gleichung (7.4') zur Bestimmung des Druckfeldes.

Die Druck-Korrekturgleichung (7.4) wird **nur** dazu benutzt wird, das Geschwindigkeitsfeld zu korrigieren.

Der Algorithmus: SIMPLER

1. Schätze ein Geschwindigkeitsfeld u^*
2. Berechne die Koeffizienten der Impulsgleichungen und bestimme die Pseudo-Geschwindigkeitskomponenten [entsprechend Glg. (8.1-1) bis (8.1-3)]
3. Berechne die Koeffizienten der Druckgleichungen und bestimme die Pseudo-Geschwindigkeitskomponenten [entsprechend Glg. (7.4')]
4. Verwende dieses Druckfeld als p^* Druckfeld und berechne neue (vorläufige) Geschwindigkeitskomponenten u , v und w [Glg.: (7.1-1) bis (7.1-3)]
5. Berechne den Massen-Quellterm b [Glg: (7.6)] und löse die p' -Gleichung
6. Korrigiere das Geschwindigkeitsfeld mittels [Glg.: (7.3-1) bis (7.3-3)],
korrigiere **nicht** das Druckfeld
7. Transportiere mit dem Geschwindigkeitsfeld andere skalare Größen falls nötig
8. Gehe zu Schritt 2 für einen weiteren Iterationsschritt bis Konvergenz vorliegt

$$\hat{u}_e = (\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b) / \tilde{a}_e \quad (8.1-1)$$

$$\hat{v}_n = (\sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b) / \tilde{a}_n \quad (8.1-2)$$

$$\hat{w}_t = (\sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b) / \tilde{a}_t \quad (8.1-3)$$

$$\tilde{a}_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + a_T p_T + a_B p_B + b \quad (7.4')$$

mit

$$b = (\rho_P^\nu - \rho_P^{\nu+1}) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t + ((\rho \hat{u} A)_w - (\rho \hat{u} A)_e) + ((\rho \hat{v} A)_s - (\rho \hat{v} A)_n) + ((\rho \hat{w} A)_b - (\rho \hat{w} A)_t) \quad (7.6')$$

$$\tilde{a}_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_T p'_T + a_B p'_B + b \quad (7.4)$$

mit

$$b = (\rho_P^\nu - \rho_P^{\nu+1}) \Delta x \Delta y \Delta z / \Delta t + ((\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e) + ((\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n) + ((\rho w^* A)_b - (\rho w^* A)_t) \quad (7.6)$$

$$u_e = u_e^* + (p'_P - p'_E) A_e / \tilde{a}_e \quad (7.3-1)$$

$$v_n = v_n^* + (p'_P - p'_N) A_n / \tilde{a}_n \quad (7.3-2)$$

$$w_t = w_t^* + (p'_P - p'_T) A_t / \tilde{a}_t \quad (7.3-3)$$

$$\tilde{a}_e u_e^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e \quad (7.1-1)$$

$$\tilde{a}_n v_n^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_P^* - p_N^*) A_n \quad (7.1-2)$$

$$\tilde{a}_t w_t^* = \sum_{nb} a_{nb} w_{nb}^* + b + (p_P^* - p_T^*) A_t \quad (7.1-3)$$