Musterlösung WS14

1. Aufgabe (22 Punkte)

a) Isentrope Kompression:

$$T_{\mathrm{A},2} = T_{\mathrm{A},1}\left(\frac{V_{\mathrm{A},1}}{V_{\mathrm{A},2}}\right)^{\kappa-1} = T_{\mathrm{EW}}(p_u)\,\varepsilon^{\kappa-1}\,, \quad T_{\mathrm{EW}}(p_u) = \vartheta_{\mathrm{EW}}(p_u) + 273{,}15\ \mathrm{K}$$

b) Volumenänderungsarbeit aus 1. Hauptsatz für adiabates geschlossenes System A:

$$W_{12}^{V} = m_{\mathrm{A}}\,(u_2 - u_1) = m_{\mathrm{A}}\,c_v\Big(T_{\mathrm{A},2} - T_{\mathrm{EW}}(p_u)\Big) = \frac{m_{\mathrm{A}}\,R\,T_{\mathrm{EW}}(p_u)}{\kappa-1}\,(\varepsilon^{\kappa-1}-1)\ (>0)$$

Arbeit an der Kolbenstange:

$$W_{12}^{K} = -\,m_{\mathrm{A}}\int_1^2 (p-p_u)\,\mathrm{d}V = W_{12}^{V} - p_u\,V_{\mathrm{A},1}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\ (<W_{12}^{V})\,,\ V_{\mathrm{A},1} = \frac{m_{\mathrm{A}}\,R\,T_{\mathrm{EW}}}{p_u}$$

c) Entropieänderung:

$$S_{\mathrm{A},3}-S_{\mathrm{A},1} = \cancelto{0}{S_{\mathrm{A},2}-S_{\mathrm{A},1}} + S_{\mathrm{A},3}-S_{\mathrm{A},2} = m_{\mathrm{A}}\left(c_v\,\ln\Big(\frac{T_{\mathrm{EW}}}{T_{\mathrm{A},2}}\Big) + R\,\cancelto{0}{\ln\Big(\frac{V_{\mathrm{A},3}}{V_{\mathrm{A},2}}\Big)}\right) = -\,m_{\mathrm{A}}\,R\,\ln\varepsilon\ (<0)\,,\ c_v = \frac{1}{\kappa-1}\,R$$

d) Abgeführte Wärme:

$$Q_{23} = U_{\mathrm{A},3} - U_{\mathrm{A},2} = m_{\mathrm{A}}\,\frac{R}{\kappa-1}\,(T_{\mathrm{A},3}-T_{\mathrm{A},2}) = m_{\mathrm{A}}\,\frac{R}{\kappa-1}\,T_{\mathrm{EW}}\Big(1-\varepsilon^{\kappa-1}\Big)\ (<0)$$

Geschmolzene Eismasse:

$$\Delta m_{\mathrm{E}} = m_{\mathrm{E},3} - m_{\mathrm{E},2} = \frac{Q_{23}}{r_s(p_u)}\ (<0)$$

e) Entropiezunahme im Eiswasser:

$$S_{\mathrm{EW},3} - S_{\mathrm{EW},2} = \frac{-Q_{23}}{T_{\mathrm{EW}}}\ (>0)$$

f) Irreversible Entropieproduktion
(Bilanz am adiabaten Gesamtsystem $\delta Q = 0$ oder am System Gas + Wärmeleiter)

$$S_{\mathrm{irr},13} = +(S_{\mathrm{A},3}-S_{\mathrm{A},2}) + (S_{\mathrm{B},3}-S_{\mathrm{B},2}) = -m_{\mathrm{A}}\,R\left(\ln\varepsilon - \frac{\varepsilon^{\kappa-1}-1}{\kappa-1}\right)\ (>0)$$

g) Spiegeländerung

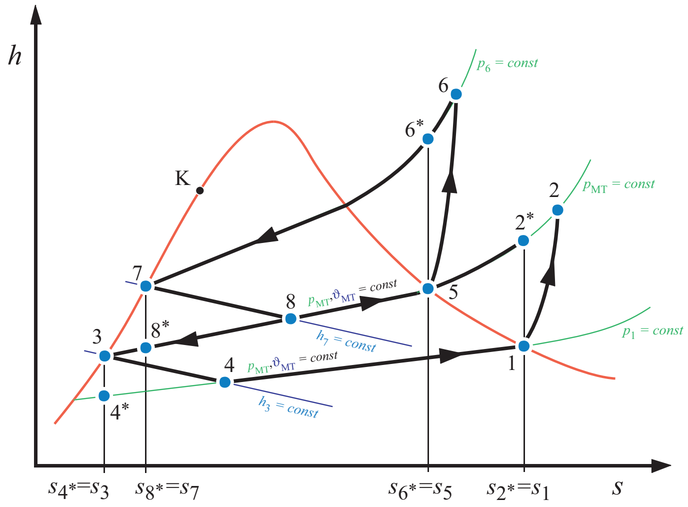
$$\Delta h = \frac{V_{\mathrm{EW},3}-V_{\mathrm{EW},2}}{A_{\mathrm{R}}} = \frac{\Delta m_{\mathrm{E}}\,v_{\mathrm{E}}(\vartheta_{\mathrm{EW}}) + \Delta m_{\mathrm{W}}\,v_{\mathrm{W}}(\vartheta_{\mathrm{EW}})}{A_{\mathrm{R}}}\,,\ \Delta m_{\mathrm{W}} = -\Delta m_{\mathrm{E}}$$

$$\Delta h = \frac{\Delta m_{\mathrm{E}}}{A_{\mathrm{R}}}\,(v_{\mathrm{E}}(p_u) - v_{\mathrm{W}}(p_u))\ (<0)$$

$$\Rightarrow \quad S_{\mathrm{A},3} - S_{\mathrm{A},1} = S_{\mathrm{irr}} + \frac{\Delta h\,A_{\mathrm{R}}}{v_{\mathrm{E}}(p_u) - v_{\mathrm{W}}(p_u)}\,\frac{r_s}{T_{\mathrm{EW}}}$$

2. Aufgabe (46 Punkte)

a)



b) Massenstrom $\dot{m}_1$ im Niederdruckkreislauf aus Bilanz am Verdampfer:

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{Q}}{h_1 - h_4}, \quad \text{Aus T/D: } h_1 = h(p_1, x_1 = 1) = h''(p_1)\,,\ h_4 = h_3 = h(p_{\mathrm{MT}}, x = 0) = h'(\vartheta_{\mathrm{MT}})$$

Massenstrom $\dot{m}_2$ aus Bilanz am Mischgefäß:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1\,(h_3 - h_2) + \dot{m}_2\,(h_5 - h_8) = \dot{Q}\,\frac{h_3 - h_2}{h_1 - h_4} + \dot{m}_2\,(h_5 - h_8),$$

$$\Rightarrow \quad \dot{m}_2 = \dot{Q}\,\frac{1 - \dfrac{h_3 - h_2}{h_1 - h_4}}{h_5 - h_8} \quad \left(\text{falls} \quad \frac{h_3 - h_2}{h_1 - h_4} < 1\right),\ h_2 = h_1 + \frac{h_{2^*} - h_1}{\eta_{s,\mathrm{V}}}$$

Aus T/D: $h_{2^*} = h(p_{\mathrm{MT}}, s_{2^*})$ mit $p_{\mathrm{MT}} = p_s(\vartheta_{\mathrm{MT}}),\ s_{2^*} = s''(p_1)$

$h_8 = h_7 = h'(p_6),\ h_5 = h''(\vartheta_{\mathrm{MT}})$

c) Dampfgehalt x_8

$$x_8 = \frac{h_8 - h'(p_{\mathrm{MT}})}{h''(p_{\mathrm{MT}}) - h'(p_{\mathrm{MT}})} \quad \text{Aus T/D: } h_8 = h_7 = h'(p_6)$$

d) Leistungszahl ζ = Nutzen/Aufwand: $\quad \zeta = \dfrac{2\,\dot{Q}}{\dot{W}^t_{12} + \dot{W}^t_{56}}$

$\dot{W}^t_{12} = \dot{m}_1\,(h_2 - h_1)$ und $\dot{W}^t_{56} = \dot{m}_2\,(h_6 - h_5)$.

Aus T/D: $h_5 = h''(p_{\mathrm{MT}}),\ h_6 = h_5 + (h_{6^*} - h_5)/\eta_{s,\mathrm{V}},\ h_{6^*} = h(p_6, s''(p_{\mathrm{MT}}))$

e) Exergieverluststrom am Mischgefäß

$$\dot{E}_{V,\mathrm{MT}} = T_u\,\dot{S}_{\mathrm{irr,MT}} \quad \text{mit} \quad \dot{S}_{\mathrm{irr,MT}} = \dot{m}_1\,(s_3 - s_2) + \dot{m}_2\,(s_5 - s_8) - \frac{\dot{Q}}{T_{\mathrm{B2}}}\,,\; T_u = \vartheta_u + 273,15\ \mathrm{K}$$

$s_8 = s'(p_{\mathrm{MT}}) + x_8\,(s''(p_{\mathrm{MT}}) - s'(p_{\mathrm{MT}}))$

Aus T/D: $s_2 = s(p_{\mathrm{MT}}, h_2)$, $s_3 = s'(p_{\mathrm{MT}})$, $s_5 = s''(p_{\mathrm{MT}})$

f) Der Exergieverlust setzt sich zusammen aus dem Exergieverlust durch die Irrreversibititäten beim Mischen der Stoffströme im Mischgefäß bei gleichzeitigem Wärmeübertrag bei der Temperatur T_{MT}

$$\dot{E}_{V,\mathrm{M}} = T_u\,\dot{S}_{\mathrm{irr,M}} = T_u\left(\dot{m}_1\,(s_3 - s_2) + \dot{m}_2\,(s_5 - s_8) - \frac{\dot{Q}}{T_{\mathrm{MT}}}\right)$$

und dem Exergieverlust $\dot{E}_{V,\mathrm{WÜ}}$ beim Wärmeübergang durch die Wand des Mischgefäßes wegen $\vartheta_{\mathrm{B2}} > \vartheta_{\mathrm{MT}}$

$$\dot{E}_{V,\mathrm{WÜ}} = T_u\,\dot{S}_{\mathrm{irr,WÜ}} = T_u\left(\frac{\dot{Q}}{T_{\mathrm{MT}}} - \frac{\dot{Q}}{T_{\mathrm{B2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{E}_{V,\mathrm{MT}} = \dot{E}_{V,\mathrm{WÜ}} + \dot{E}_{V,\mathrm{M}} = T_u\left(\dot{m}_1\,(s_3 - s_2) + \dot{m}_2\,(s_5 - s_8) - \frac{\dot{Q}}{T_{\mathrm{B2}}}\right)$$

g) Verbesserte Leistungszahl

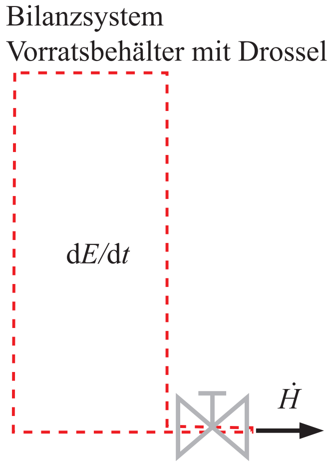
$$\zeta^* = \frac{2\,\dot{Q}}{\dot{W}^t_{12} + \dot{W}^t_{56} + \dot{W}^t_{78^*} + \dot{W}^t_{34^*}} = \zeta\,\frac{\dot{W}^t_{23} + \dot{W}^t_{56}}{\dot{W}^t_{23} + \dot{W}^t_{56} + \dot{W}^t_{78^*} + \dot{W}^t_{34^*}} > \zeta$$

$\dot{W}^t_{34^*} = \dot{m}_1\,(h_{4^*} - h_3)\,,\ \dot{W}^t_{78^*} = \dot{m}_2\,(h_{8^*} - h_7)$

mit $h_{4^*} = h(p_1, s'(p_{\mathrm{MT}}))$ und $h_{8^*} = h(p_{\mathrm{MT}}, s'(p_6))$.

3. Aufgabe (27 Punkte)

a) Druck und Temperatur im Vorratsbehälter unmittelbar nach dem Überströmen



Kräftegleichgewicht am Kolben $p_{\mathrm{Z}} = const$:

$$p_{\mathrm{V2}} = p_{\mathrm{Z}} = p_u + \frac{m_{\mathrm{K}}\, g}{A_{\mathrm{K}}}$$

1. Hauptsatz für offenes System

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\,\dot{H} = -\,\dot{m}\,h \quad \rightarrow \quad m_2\,u_2 - m_1\,u_1 = \int_1^2 \dot{m}\,h(T)\,\mathrm{d}t \overset{\mathrm{Def}}{=} h_m\,(m_2 - m_1)$$

Näherung: $h_m = 1/2\,(h_1 + h_2)$

Definition des Massenverlustes: $\Delta m = m_1 - m_2\,(> 0)$

$$m_1\,(u_2 - u_1) - \Delta m\,u_2 = -\frac{1}{2}\,(h_1 + h_2)\,\Delta m \quad \rightarrow \quad m_1\,(u_2 - u_1) = -\frac{h_1 + h_2 - 2u_2}{2}\,\Delta m$$

Mit $h = u + pv$ folgt: $m_1\,(u_2 - u_1) = -\dfrac{\Delta m}{2}\,(u_1 - u_2 + p_1 v_1 + p_2 v_2)$

Ideales Gas: $\mathrm{d}u = c_v\,\mathrm{d}T$, $pv = RT$ bzw. $pV = mRT$,

Massenverlust: $\Delta m = \dfrac{p_{\mathrm{V1}} V_{\mathrm{V}}}{R T_{\mathrm{V1}}} - \dfrac{p_{\mathrm{V2}} V_{\mathrm{V}}}{R T_{\mathrm{V2}}}$

$$\frac{p_{\mathrm{V1}} V_{\mathrm{V}}}{R_{\mathrm{V}} T_{\mathrm{V1}}}\,c_{v\mathrm{V}}\,(T_{\mathrm{V2}} - T_{\mathrm{V1}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{\mathrm{V2}} V_{\mathrm{V}}}{R T_{\mathrm{V2}}} - \frac{p_{\mathrm{V1}} V_{\mathrm{V}}}{R T_{\mathrm{V1}}}\right)\Big(c_{v\mathrm{V}}\,(T_{\mathrm{V2}} - T_{\mathrm{V1}}) + R_{\mathrm{V}}(T_{\mathrm{V2}} + T_{\mathrm{V1}})\Big) \overset{\frac{R_{\mathrm{V}}}{c_{v\mathrm{V}}} = \kappa_{\mathrm{V}} - 1}{\Rightarrow} T_{\mathrm{V2}}$$

b) Massenverlust des Vorratsbehälters:

$$\Delta m = m_{\mathrm{V1}} - m_{\mathrm{V2}} = \frac{V_{\mathrm{V}}}{R_{\mathrm{V}}}\left(\frac{p_{\mathrm{V1}}}{T_{\mathrm{V1}}} - \frac{p_{\mathrm{V2}}}{T_{\mathrm{V2}}}\right) = \frac{V_{\mathrm{V}}}{R_{\mathrm{V}}}\,\frac{p_{\mathrm{V1}}}{T_{\mathrm{V1}}}\left(1 - \frac{p_{\mathrm{V2}}}{p_{\mathrm{V1}}}\,\frac{T_{\mathrm{V1}}}{T_{\mathrm{V2}}}\right)\,(>0)$$

c) Volumenänderungsarbeit:

$$W_{12}^V = -\int_1^2 p\,\mathrm{d}V = -\,p_{\mathrm{Z}}\,(V_{\mathrm{Z2}} - V_{\mathrm{Z1}})$$

Nachher im Zylinder-Kolben-System: Gasgemisch mit den Partialdrücken $p_{i,\mathrm{Z}}$ und $p_{i,\mathrm{V}}$

$$p_{\mathrm{Z}} = p_{i,\mathrm{Z}} + p_{i,\mathrm{V}} = \frac{m_{\mathrm{Z1}}\,R_{\mathrm{Z}}\,T_u}{V_{\mathrm{Z2}}} + \frac{\Delta m\,R_{\mathrm{V}}\,T_u}{V_{\mathrm{Z2}}} \quad \Rightarrow \quad p_{\mathrm{Z}}\,V_{\mathrm{Z2}} = m_{\mathrm{Z1}}\,R_{\mathrm{Z}}\,T_u + \Delta m\,R_{\mathrm{V}}\,T_u$$

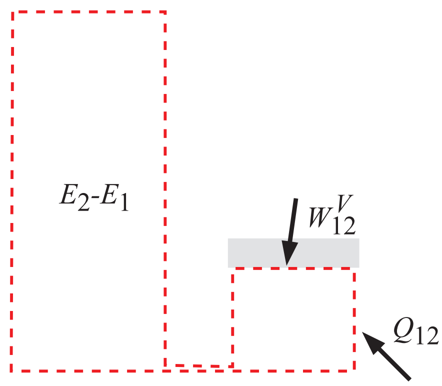
Vorher im Zylinder-Kolben-System: $p_{\mathrm{Z}}\,V_{\mathrm{Z1}} = m_{\mathrm{Z1}} R_{\mathrm{Z}} T_u$

$$\Rightarrow \quad W_{12}^V = -\,\Delta m\,R_{\mathrm{V}}\,T_u \quad (<0)$$

d) 1. Hauptsatz für das Bilanzsystem Gas:

$$
\begin{aligned}
Q_{12} = \quad & E_2 - E_1 - W_{12}^V \approx U_2 - U_1 - W_{12}^V \\
= \quad & (m_{\mathrm{V}1} - \Delta m)\, c_{v,\mathrm{V}}\, (T_{\mathrm{V}_2} - T_u) \\
& + \Delta m\, c_{v,\mathrm{V}}\, \cancelto{0}{(T_u - T_{\mathrm{V}1})} \\
& + m_{\mathrm{Z}1}\, c_{v,\mathrm{V}}\, \cancelto{0}{(T_u - T_{\mathrm{Z}1})} - W_{12}^V
\end{aligned}
$$

Bilanzsystem Gas



e) Entropieänderung für das Bilanzsystem Gas:

$$
\begin{aligned}
S_2 - S_1 \quad & = (S_2 - S_1)_{(m_{\mathrm{V}1} - \Delta m)} + (S_2 - S_1)_{\Delta m} + (S_2 - S_1)_{m_{\mathrm{Z}}} = \\
& = \Big(m_{\mathrm{V}1} - \Delta m\Big) \Big(c_{p,V}\, \ln(T_{\mathrm{Z}2}/T_u) - R_{\mathrm{V}}\, \ln(p_{\mathrm{Z}}/p_{\mathrm{V}1})\Big) + \\
& \qquad + \Delta m \Big(c_{p,\mathrm{V}}\, \ln(T_{\mathrm{Z}}/T_{\mathrm{V}1}) - R_{\mathrm{V}}\, \ln(p_{i,\mathrm{V}}/p_{\mathrm{V}1})\Big) + \\
& \qquad + \quad m_{\mathrm{Z}1} \Big(c_{p,\mathrm{Z}}\, \cancelto{0}{\ln(T_u/T_u)} - R_{\mathrm{Z}}\, \ln(p_{i,\mathrm{Z}}/p_{\mathrm{Z}})\Big)
\end{aligned}
$$

f) Irreversible Entropieproduktion des Gases:

$$
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dot{S}_Q + \dot{S}_{irr}\ , \quad \dot{S}_Q = \frac{\dot{Q}}{T_u} \qquad \text{Integration:} \quad S_{irr} = S_2 - S_1 - Q_{12}/T_u
$$

Exergieverlust des Gases: $E_V = T_u\, S_{irr}$

Bilanzsystem Gas