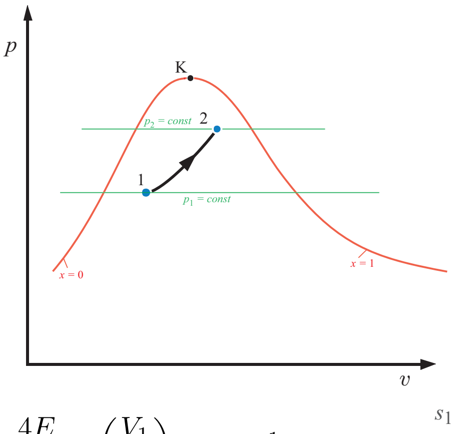
Musterlösung Herbst 2012

1. Aufgabe (32 Punkte)

a) siehe Abbildung



b) Wegen des Zweiphasengleichgewichts ist der Partialdruck des Brennstoffes (näherungsweise) durch den Dampfdruck bei der Temperatur ϑ_1 gegeben:

Aus Tab.: $p_{B,1} \approx p_{\text{sat}}(\vartheta_1 = \vartheta_u)$

Mit dem Daltonschen Gesetz ergibt sich der Partialdruck der Luft zu:

$$p_{L,1} = p_1 - p_{B,1} = p_u + \frac{4E}{3}\,\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) - p_{B,1}.$$ [1]

c) In der Gasphase verhalten sich Brennstoff und Luft so, als ob sie das Gasvolumen V'' ausfüllen und die jeweilig andere Komponente nicht vorhanden wäre. Es folgt deshalb für den Brennstoff mit $V_1 = V_1' + V_1'' = m_{B,1}'\,v_{B,1}' + m_{B,1}''\,v_{B,1}''$ bzw. $\dfrac{V_1}{m_B} = (1-x_1)\,v_1' + x_1\,v_1'' = v_1$ das Hebelgesetz:

$$x_1 = \frac{V_1/m_B - v_{B,1}'}{v_{B,1},' - v_{B,1}'} \quad \text{aus Tab.:} \quad v_{B,1}' = v'(\vartheta_1)\,,\ v_{B,1}'' = v''(\vartheta_1).$$

Die Massen errechnen sich damit aus: $\quad m_{B,1}' = (1 - x_{B,1})\,m_B \quad$ und $\quad m_{B,1}'' = x_{B,1}\,m_B$

d) Das Volumen der Dampfphase ist: $V_1'' = m_{B,1}''\,v_1''$

Mit der thermischen Zustandsgleichung und dem Partialdruck folgt für die eingeschlossene Luftmasse:

$$m_L = \frac{p_{L,1}\,V_1''}{R_L\,T_1} \quad \text{mit} \quad T_1\ [\text{K}] = \vartheta_1\ [^\circ\text{C}] + 273{,}15\ [\text{K}]$$

e) Massenbilanzen $m_{B,1} = m_{B,2} = m_B$ und Volumenbilanz für den Brennstoff:

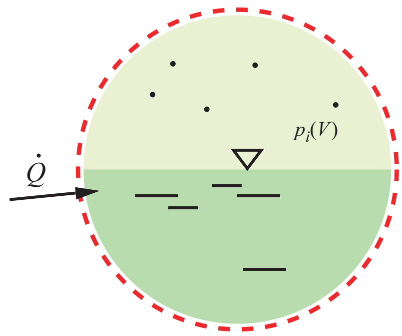
$$\frac{V_1}{m_B} = (1 - x_{B,1})\,v_{B,1}' + x_{B,1}\,v_{B,1}'' \qquad \Rightarrow \quad x_{B,1} \quad \text{(siehe oben)}$$

$$\frac{V_2}{m_B} = (1 - x_{B,2})\,v_{B,2}' + x_{B,2}\,v_{B,2}'' \qquad \Rightarrow \quad x_{B,2}$$

Aus Tab.: $v_{B,2}' = v'(\vartheta_2)\,,\ v_{B,2}'' = v''(\vartheta_2)$

$$\Rightarrow \quad \Delta m_{12} = (x_{B,2} - x_{B,1})\,m_B$$

f) Energiebilanz für geschlossenes System *Brennstoff + Luft*:



$$
\begin{aligned}
Q_{12} &= m_B\,(u_{B,2} - u_{B,1}) + m_L\,(u_{L,2} - u_{L,1}) + W_{12} \\
u_{B,2} - u_{B,1} &= (1 - x_{B,2})\,(h_{B,2}' - p_2\,v_{B,2}') + x_{B,2}\,(h_{B,2}'' - p_{B,2}\,v_{B,2}'') - \\
&\quad (1 - x_{B,1})\,(h_{B,1}' - p_1\,v_{B,1}') + x_{B,1}\,(h_{B,1}'' - p_{B,1}\,v_{B,1}'') + \\
u_{L,2} - u_{L,1} &= (c_{p,L} - R_L)\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)
\end{aligned}
$$

[1] Bemerkung: Da die Gasphase ein Gemisch aus Brennstoffdampf und Luft ist, ist der Dampfdruck des Brennstoffes nicht exakt gleich demjenigen des Reinstoffes. Unter der Annahme, dass Luft nicht im flüssigen Brennstoff gelöst wird, gilt (näheres in Thermodynamik II): $p_{B,1} > p_{\text{sat}}(\vartheta_1 = \vartheta_u)$.

Dabei gilt

$$p_2 = p_{B,2} + p_{L,2} = p_u + \frac{4E}{3}\,\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$V_2 = x_{B,2}\,\frac{V_2''}{m_{B,2}''} + (1 - x_{B,2})\,\frac{V_2'}{m_{B,2}'}$$

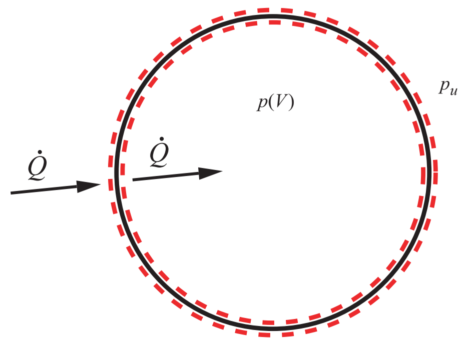
Aus Tab.:

$$p_{B,1} = p_{\text{sat}}(\vartheta_1),\; p_{B,2} = p_{\text{sat}}(\vartheta_2)\,,\; h_{B,1}' = h_B'(\vartheta_1),\; h_{B,1}'' = h_B''(\vartheta_1)\,,\; h_{B,2}' = h_B'(\vartheta_2),\; h_{B,2}'' = h''(\vartheta_2)$$

Negative Volumenänderungsarbeit W_{12}:

$$W_{12} = \int_1^2 p(V)\,\mathrm{d}V \quad = \quad \int_1^2 \left(p_u + \frac{4}{3}\,E\,\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)\right)\,\mathrm{d}V$$

$$\left(\quad = \quad p_u\,(V_2 - V_1) + \frac{4\,E}{3}\int_1^2 \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)\mathrm{d}V \right)$$



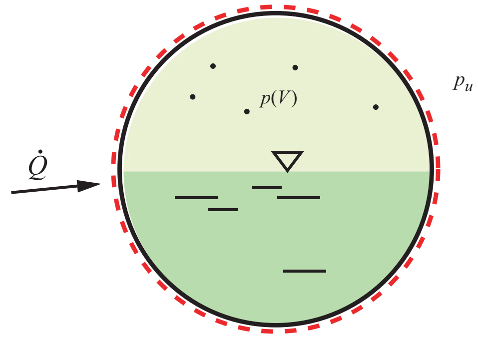
d) Energiebilanz für geschlossenes System *Tankhülle*:

$$\int_1^2 (p(V) - p_u)\,\mathrm{d}V = \frac{4\,E}{3}\int_1^2 \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)\mathrm{d}V = \Delta E_{\text{elast}}$$

Kontrolle: Energiebilanz für *Brennstoff + Luft + Tankhülle*

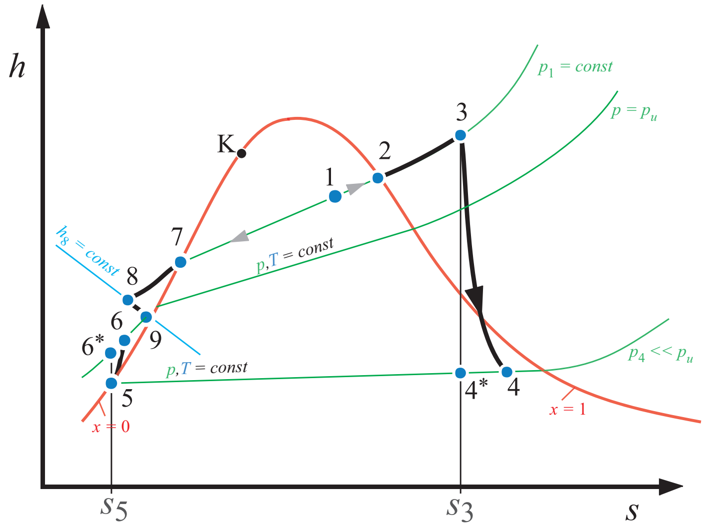
$$Q_{12} - \int_1^2 p_u(V)\,\mathrm{d}V = \quad m_B\,(u_{B,2} - u_{B,2}) + \Delta E_{\text{elast}}$$

$$= \quad m_L\,(u_{L,2} - u_{L,2}) + \frac{4\,E}{3}\int_1^2 \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)\mathrm{d}V$$



2. Aufgabe (50 Punkte)

a) siehe Abbildung



b) Mit dem Hebelgesetz:

$$x_1 = \frac{h_1 - h_7}{h_2 - h_7}$$

aus Tab.:

$$h_1 = (p_1, v_1)\,, \quad h_7 = h'(p_1)\,,\ h_2 = h''(p_1)$$

c) Energiebilanz für stationären Fließprozess von 2 nach 3:

$$\dot{Q}_{23} + \overset{0}{\cancel{P^t_{23}}} = \dot{m}''\,(h_3 - h_2)\,, \quad \text{mit} \quad \dot{m}'' = x_1\,\dot{m} \quad \text{aus Tab.:} \quad h_3 = h(p_3, \vartheta_3)$$

Energiebilanz für stationären Fließprozess von 3 nach 4:

$$\overset{0}{\cancel{\dot{Q}_{34}}} + P^t_{34} = \dot{m}''\,(h_4 - h_3) = \dot{m}''\,\eta_{sT}\,(h_{4^*} - h_3) \quad \text{aus Tab.:} \quad h_{4^*} = h(p_4, s_{4^*} = s_3 = s(p_3, \vartheta_3))$$

d) Energiebilanz für stationären Fließprozess von 4 nach 5:

$$\dot{Q}_{45} + \overset{0}{\cancel{P^t_{45}}} = \dot{m}''\,(h_5 - h_4)\,, \quad h_4 = \frac{P^t_{34}}{\dot{m}''} + h_3 \quad \text{aus Tab.:} \quad h_5 = h(p_5, x_5) = h'(p_5)$$

Energiebilanz für stationären Fließprozess von 5 nach 6:

$$\overset{0}{\cancel{\dot{Q}_{56}}} + P^t_{56} = \dot{m}''\,(h_6 - h_5) = \frac{\dot{m}''}{\eta_{sP}}\,(h_{6^*} - h_5) \qquad \text{aus Tab.:} \quad h_{6^*} = h(p_u, s_{6^*} = s_5 = s(p_5, x_5) = s'(p_5))$$

$$h_6 = h_5 + \frac{P^t_{56}}{\dot{m}''} \qquad \text{aus Tab.:} \quad \vartheta_6 = \vartheta(h_6, p_6)$$

e) Energiebilanz für stationären Fließprozess von 7 nach 8:

$$\dot{Q}_{78} + \overset{0}{\cancel{P^t_{78}}} = \dot{m}'\,(h_8 - h_7) = \dot{m}'\,(h_9 - h_7)\,, \quad \text{mit} \quad \dot{m}' = (1 - x_1)\,\dot{m}$$

$$\text{aus Tab.:} \quad h_9 = h(p_9, \vartheta_9)\,,\ h_7 = h'(p_1) \text{ (siehe oben)}$$

f) Exergieverluste:

$$e_{V,\mathrm{T}} = T_u\Big(s_4 - s_{4^*}\Big)\,, \quad e_{V,\mathrm{D}} = T_u\Big(s_9 - s_8\Big)\,, \quad e_{V,\mathrm{A}} = T_u\Big(x_1\,(s_2 - s_1) + (1 - x_1)\,(s_7 - s_1)\Big) \equiv 0$$

Drossel: $\quad h_8 = h_9$

aus Tab.: $\quad s_8 = s(h_9, p_7)\,, \quad s_7 = s'(p_1)\,, \quad s_8 = s(h_9, p_9)\,, \quad s_1 = s(h_1, p_1)\,, \quad s_2 = s''(p_1)$

g) Exergiebilanz (stationär) für ein differentielles Element im Überhitzer:

$$0 = e_h - (e_h + \mathrm{d}e_h) + e_q + e_{V,\text{ÜH}}$$

Mit $\mathrm{d}e_h = \mathrm{d}h - T_u\,\mathrm{d}s$, $e_q = \left(1 - \frac{T_u}{T}\right)\delta q$, $\delta q = \mathrm{d}h$ und $T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}h - v\cancelto{0}{\mathrm{d}p}$ folgt die Behauptung:

$$e_{V,\text{ÜH}} \equiv 0$$

3. Aufgabe (19 Punkte)

a) Für ein ideales Gas gilt

$$dh = c_p\,dT \quad \text{bzw.} \quad du = c_v\,dT$$

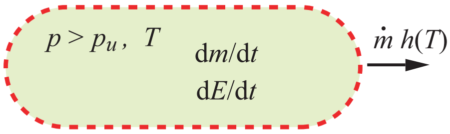
so dass

$$\frac{dh}{du} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = \kappa \quad \text{nach Int.} \quad h = \kappa\, u + const$$

Die Konstante kann bei einem reinen Stoff o.B.d.A. zu Null gesetzt werden.

b) Massenbilanz: $\dfrac{dm}{dt} = -\dot{m}$

Energiebilanz: $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{dU}{dt} = m\,\dfrac{du}{dt} + u\,\dfrac{dm}{dt} = -\dot{m}\,h$



Daraus folgt die Differentialgleichung:

$$m\,du = (h - u)\,dm$$

bzw. mit dem Ergebnis aus a) und nach Trennung der Variablen

$$\frac{dm}{m} = \frac{du}{(\kappa - 1)\,u}$$

und nach Integration:

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = \frac{1}{\kappa - 1}\,\ln\left(\frac{u}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(\kappa-1)} \quad \overset{T=\frac{pV}{mR},\,T_0=\frac{p_0V}{m_0R}}{\Rightarrow} \quad \frac{m_1}{m_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/\kappa}$$

bzw.

$$\Delta m = m_0 - m_1 = m_0\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/\kappa}\right) \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{R_{\mathrm{He}} + c_{v,\mathrm{He}}}{c_{v,\mathrm{He}}}$$

Für anfängliches Gleichgewicht ist $T_0 = T_u$ mit $T_u\,[\mathrm{K}] = \vartheta_{\mathrm{u}}\,[^\circ\mathrm{C}] + 273,15\,[\mathrm{K}]$

c) Aus Vorstehendem folgt:

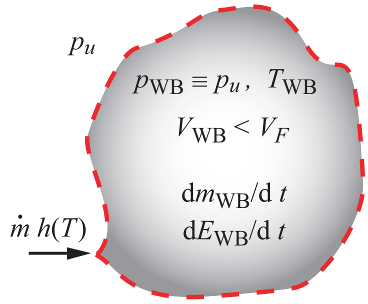
$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}$$

Der Exponent zeigt, dass das Gas im Inneren der Druckflasche isentrop expandiert ($p\,v^\kappa = const$).
Für die spezifische Entropieänderung gilt nämlich:

$$s_1 - s_0 = c_{p,\mathrm{He}}\,\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - R_{\mathrm{He}}\,\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) = \left(c_{p,\mathrm{He}} - R_{\mathrm{He}}\,\frac{\kappa}{\kappa - 1}\right)\,\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right),$$

was wegen $c_p = \dfrac{\kappa}{\kappa - 1}\,R_{\mathrm{He}}$ Null ergibt.

d) Energiebilanz für das Helium im Wetterballon WB:



$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{WB}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{WB}}}{\mathrm{d}t} = \dot{m}\,h + \dot{W}^V \quad \text{mit } \dot{m}\,h = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

oder alternativ adiabates geschlossenes Gesamtsystem:

$$\dot{W}^V = -p_u \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{WB}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}U_{\mathrm{WB}} = -p_u\,\mathrm{d}V - \mathrm{d}U$$

Integration der Terme:

$$\int_0^1 \mathrm{d}U_{\mathrm{WB}} = U_{\mathrm{WB},1} - \cancelto{0}{U_{\mathrm{WB},0}} = \Delta m\, c_{v,\mathrm{He}}\,(T_{\mathrm{WB},1} - T_{\mathrm{ref}})$$

$$\int_0^1 -p_u\,\mathrm{d}V = -p_u\,(V_{\mathrm{WB},1} - \cancelto{0}{V_0})$$

$$\int_0^1 -\mathrm{d}U = \int_0^1 -\mathrm{d}(mu) = -(m_0 - \Delta m)\,u_1 + m_0\,u_0 = -(m_0 - \Delta m)\,c_{v,\mathrm{He}}\,(T_1 - T_{\mathrm{ref}}) + m_0\,c_{v,\mathrm{He}}\,(T_0 - T_{\mathrm{ref}})$$

Temperaturverhältnis (T_{ref} entfällt richtigerweise!):

$$\frac{T_{\mathrm{WB},1}}{T_1} = 1 + \frac{m_0}{\Delta m}\left(\frac{T_0}{T_1} - 1\right) - \frac{p_u\,V_{\mathrm{WB},1}}{c_{v,\mathrm{He}}\,T_1}$$

e) Entropiebilanz für das Gesamtsystem:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dot{S}_{\mathrm{irr}} \quad \overset{\text{Int.}}{\Rightarrow} \quad S_{\mathrm{irr}} = \Delta m\left(c_{p,\mathrm{He}}\,\ln\left(\frac{T_{\mathrm{WB},1}}{T_0}\right) - R_{\mathrm{He}}\,\ln\left(\frac{p_u}{p_0}\right)\right) + (m - \Delta m)\,\cancelto{0}{\Delta s_{\mathrm{Flasche}}}$$
$$= \Delta m\left(c_{p,\mathrm{He}}\,\ln\left(\frac{T_{\mathrm{WB},1}}{T_0}\right) - R_{\mathrm{He}}\,\ln\left(\frac{p_u}{p_0}\right)\right)$$

(Nur die überströmende Masse Δm ändert Ihre Entropie.)

Da für das abgeschlossene System nach dem 2. Hauptsatz $S_{F,\mathrm{irr}} > 0$ gilt, muss stets $T_{\mathrm{WB},1} > T_1$ sein.

f) Der Wetterballon besitzt solange Auftrieb, solange das Gewicht des Heliums kleiner als das Gewicht der verdrängten Luft ist: $m_{\mathrm{He}}\,g \leq m_L\,g$

$$\frac{p_u\,V_{\mathrm{WB},1}}{R_{\mathrm{He}}\,T_{\mathrm{WB},1}} \leq \frac{p_u\,V_{\mathrm{WB},1}}{R_L\,T_u} \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{WB},1} \geq \frac{R_L}{R_{\mathrm{He}}}\,T_u = T_{\mathrm{WB,min}}$$

Die Auswertung dieser Bedingung liefert

$$V_{\mathrm{WB},1} \leq \left(1 + \frac{m_0}{\Delta m}\left(\frac{T_0}{T_1} - 1\right) - \frac{R_L}{R_{\mathrm{He}}}\,\frac{T_u}{T_1}\right)\frac{c_{v,\mathrm{He}}}{p_u} = V_{\max}$$