Musterlösung WS12

1. Aufgabe (25 Punkte)

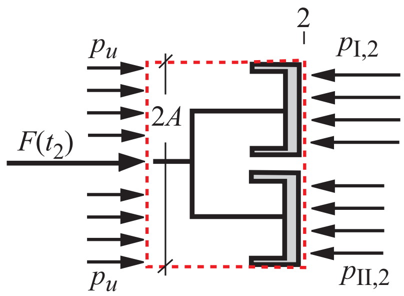
a) Isentrope Zustandsänderung für Zylinder I:

Mit $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}S = 0$, $\mathrm{d}U = m\,c_v\,\mathrm{d}T$, $pV^\kappa = const$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{R}{c_v}\frac{\mathrm{d}V}{V}\,, \quad \overset{\substack{c_v=c_p-R \\ \kappa=c_p/c_v}}{\Rightarrow} \qquad T_{\mathrm{I},2} = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{R}{c_p-R}}$$

Isotherme Zustandsänderung für Zylinder II: $\Rightarrow \quad T_{\mathrm{II},2} = T_1$

b) Kräftegleichgewicht am Kolben



$$\begin{aligned} F(t_2) &= (p_{\mathrm{I},2} + p_{\mathrm{II},2} - 2p_u)\,A \\ p_{\mathrm{I},2} &= \frac{m_\mathrm{I}\,R\,T_{\mathrm{I},2}}{V_2} \\ p_{\mathrm{II},2} &= \frac{m_\mathrm{II}\,R\,T_{\mathrm{II},2}}{V_2} \end{aligned}$$

c) Isentrope Zustandsänderung für Zylinder I:

Aus $T\mathrm{d}s = \mathrm{d}u + p\,\mathrm{d}v$ folgt mit $\mathrm{d}s = 0$:

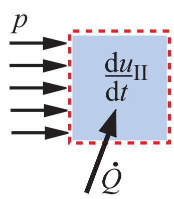
$$W^V_{\mathrm{I},12} = -\,m_\mathrm{I}\int_1^2 p\mathrm{d}v_\mathrm{I} = m_\mathrm{I}\int_1^2 \mathrm{d}u_\mathrm{I} = m_\mathrm{I}\int_1^2 c_v\mathrm{d}T_\mathrm{I} = m_\mathrm{I}(c_p - R)\left(T_{\mathrm{I},2} - T_1\right)\ (>0)$$

Isotherme Zustandsänderung für Zylinder II:

$$W^V_{\mathrm{II},12} = -\,m_\mathrm{II}\int_1^2 p\mathrm{d}v_\mathrm{II} \overset{\substack{p\,v=R\,T=R\,T_1 \\ \downarrow}}{=} -\,m_\mathrm{II}R\,T_1\int_1^2 \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{II}}{v_\mathrm{II}} = m_\mathrm{II}R\,T_1\,\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\ (>0)$$

d)

Energiebilanz am Gas II:

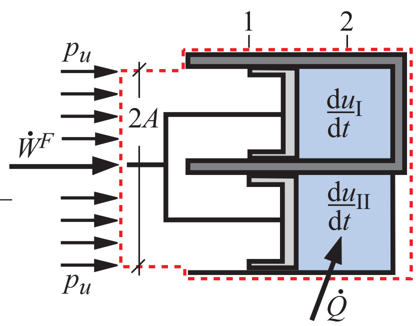


$$Q_{12} + W^V_{\mathrm{II},12} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{12} = -m_\mathrm{II}\,R\,T_1\,\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Bilanz am Gesamtsystem:

$$W^F_{12} + Q_{12} + W^{V,p_u}_{12} = m_\mathrm{I}\,c_v\left(T_{\mathrm{I},2} - T_1\right) \qquad \text{Unbek.:} \quad W^F_{12}\,,\ W^{V,p_u}_{12}$$

Verschiebearbeit:



$$W^{V,p_u}_{12} = -\int_1^2 p_u\,\mathrm{d}V = 2p_u\left(V_1 - V_2\right)\ (>0)$$

$$\Rightarrow \quad W^F_{12} = m_\mathrm{II}\,R\,T_1\,\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + m_\mathrm{I}\,c_v\left(T_{\mathrm{I},2} - T_1\right) - 2p_u\left(V_1 - V_2\right)$$

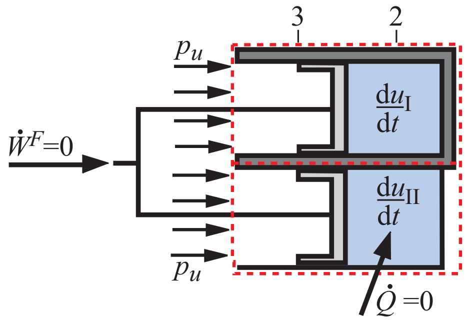
e) Entropieänderung des Gases:

$$S_2 - S_1 = \cancelto{0}{\Delta S_\mathrm{I}} + \Delta S_\mathrm{II} = m_\mathrm{II}\, R\, \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (< 0)$$

f) Entropiebilanz am Gesamtsystem:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{Q}}{T_u} + \dot{S}_\mathrm{irr} \quad \overset{\int_1^2}{\Rightarrow} \quad S_{\mathrm{irr},12} = S_2 - S_1 - \frac{Q_{12}}{T_u} = m_\mathrm{II}\, R\, \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \left(\frac{T_1}{T_u} - 1\right)$$

g)



Irreversible Expansion ohne Wärmeübergang und Arbeit an der Kolbenstange auf Zustand 3 mit Endvolumen V_3:

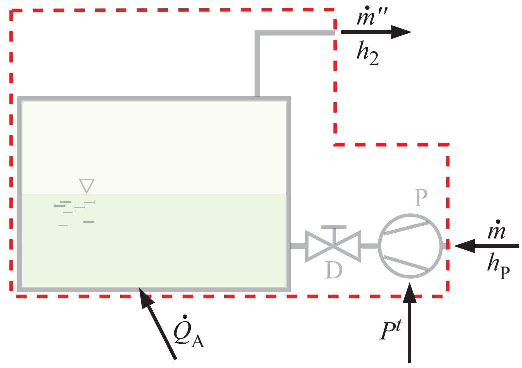
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dot{S}_\mathrm{irr} \quad \Rightarrow$$

$S_{\mathrm{irr},23} = m_\mathrm{I}\,(s_3 - s_2)_\mathrm{I} + m_\mathrm{II}\,(s_3 - s_2)_\mathrm{II}$	(1) Unbek.: $S_{\mathrm{irr},2,3}$, $(s_3 - s_2)_\mathrm{I}$, $(s_3 - s_2)_\mathrm{II}$
$(s_3 - s_2)_\mathrm{I} = c_v\, \ln\left(\frac{T_{\mathrm{I},3}}{T_{\mathrm{I},2}}\right) + R\, \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$	(2) Unbek. 4,5: $T_{\mathrm{I},3}$, V_3
$(s_3 - s_2)_\mathrm{II} = c_v\, \ln\left(\frac{T_{\mathrm{II},3}}{T_{\mathrm{II},2}}\right) + R\, \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$	(3) Unbek. 6: $T_{\mathrm{II},3}$
$p_{\mathrm{I},3}\, V_3 = m_\mathrm{I}\, R\, T_{\mathrm{I},3}$	(4) Unbek. 7: $p_{\mathrm{I},3}$
$p_{\mathrm{II},3}\, V_3 = m_\mathrm{II}\, R\, T_{\mathrm{II},3}$	(5) Unbek. 8: $p_{\mathrm{II},3}$
$(s_3 - s_2)_\mathrm{I} = (c_v + R)\, \ln\left(\frac{T_{\mathrm{I},3}}{T_{\mathrm{I},2}}\right) - R\, \ln\left(\frac{p_{\mathrm{I},3}}{p_{\mathrm{I},2}}\right)$	(6) alternativ Massenerhaltung: $\frac{p_{\mathrm{I},3}\, V_3}{R\, T_{\mathrm{I},3}} = \frac{p_{\mathrm{I},2}\, V_2}{R\, T_{\mathrm{I},2}}$
$(s_3 - s_2)_\mathrm{II} = (c_v + R)\, \ln\left(\frac{T_{\mathrm{II},3}}{T_{\mathrm{II},2}}\right) - R\, \ln\left(\frac{p_{\mathrm{II},3}}{p_{\mathrm{II},2}}\right)$	(7) alternativ Massenerhaltung: $\frac{p_{\mathrm{II},3}\, V_3}{R\, T_{\mathrm{II},3}} = \frac{p_{\mathrm{II},2}\, V_2}{R\, T_{\mathrm{II},2}}$
$F_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{\mathrm{I},3} + p_{\mathrm{II},3} - 2 p_u = 0$	(8)

2. Aufgabe (16 Punkte)

A a) Da Phasengleichgewicht gefordert ist, muss der Druck dem Dampfdruck der chemischen Substanz bei der betreffenden Temperatur entsprechen:

$$p \stackrel{\text{Tab.}}{=} p^{\text{sat}}(\vartheta_{\text{A}})$$



A b) Mit Füllverhältnis 1/3 gilt:

$$V' = m'\,v' = \frac{V}{3}$$

$$V'' = m''\,v'' = \frac{2V}{3}$$

$$v',\, v'' \stackrel{\text{Tab.}}{=} v'(\vartheta_{\text{A}}),\, v'',(\vartheta_{\text{A}})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m'}{m''} = \frac{v''(\vartheta_{\text{A}})}{2\,v'(\vartheta_{\text{A}})}$$

A c) Energie- und Massenbilanz im stationären Betrieb:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \dot{m}\,h_{\text{P}} - \dot{m}''\,h_2 + \dot{Q}_{\text{A}} + P^t\,, \qquad h_2 \stackrel{\text{Tab.}}{=} h''(\vartheta_{\text{A}})$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \dot{m}''$$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}_{\text{A}} = \dot{m}\,(h''(\vartheta_{\text{A}}) - h_{\text{P}}) - P^t$$

B a) Energie- und Massenbilanz für instationären Betrieb:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \dot{m}\,h_{\text{P}} + \dot{Q}_{\text{A}} + P^t \qquad \stackrel{\text{Int.}}{\Rightarrow} \quad m_2\,u_2 - m_1\,u_1 = (m_2 - m_1)\,h_{\text{P}} + \Delta t\,(\dot{Q}_{\text{A}} + P^t)$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \dot{m} \qquad \stackrel{\text{Int.}}{\Rightarrow} \quad m_2 - m_1 = \dot{m}\,\Delta t\,, \quad m_2 = m_1 + \dot{m}\,\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{m_1\,(u_2 - u_1)}{\dot{m}\,(h_{\text{P}} - u_2) + \dot{Q}_{\text{A}} + P^t} \qquad (1) \quad \text{Unbek.: } \Delta t,\, u_2,\, u_1, m_1$$

$$m_1 = m_1' + m_1'' = \frac{V'}{v'(\vartheta_{\text{A}})} + \frac{V''}{v''(\vartheta_{\text{A}})} \qquad (2) \quad \text{aus Teil A)b)}$$

$$u_2 = u'(p_2) \qquad (3) \quad \text{Unbek.: } p_2$$

$$m_1\,u_1 = m''\,u''(\vartheta_{\text{A}}) + m'\,u'(\vartheta_{\text{A}}) \qquad (4)$$

$$V = m_2\,v'(p_2) = (m_1 + \dot{m}\,\Delta t)\,v'(p_2) \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Fünf Gleichungen für fünf Unbekannte} \quad \surd$$

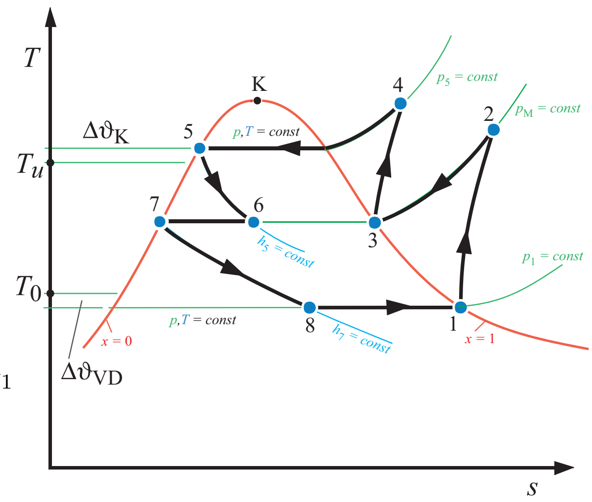
Aufgabe 3

a) siehe Abbildungen

b)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \vartheta_1 = \vartheta_0 - \Delta\vartheta_{\mathrm{VD}} \end{array}\right\} \overset{\text{Tab.}}{\Rightarrow} \quad p_1$$

$$\left.\begin{array}{l} x_5 = 0 \\ \vartheta_5 = \vartheta_u - \Delta\vartheta_{\mathrm{K}} \end{array}\right\} \overset{\text{Tab.}}{\Rightarrow} \quad p_5$$

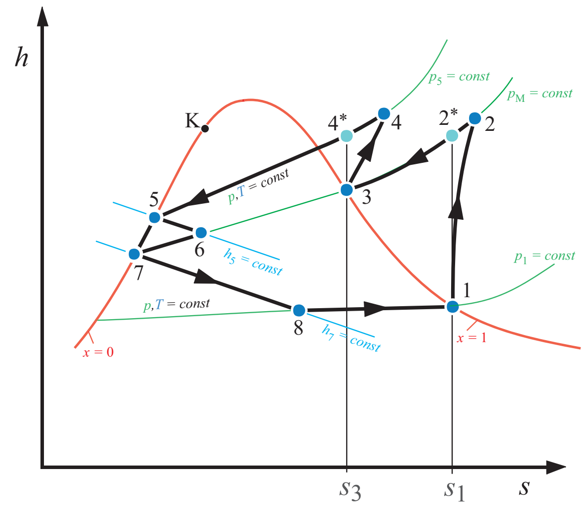


c)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = 0 = h_1 - h_2 + \overset{0}{\cancel{q}}_{12} + w_{12}^t \\ h_1 \overset{\text{Tab.}}{=} h''(p_1)\,, \; w_{12}^t = w_{\mathrm{V1}}^t \end{array}\right\} \Rightarrow \; h_2 = h_1 + w_{\mathrm{V1}}^t$$

Druck $p_2 = p_{\mathrm{M}}$ im Mischgefäß:

$$\left.\begin{array}{l} h_{2^*} = h_1 + \eta_{s,\mathrm{V}}\, w_{\mathrm{V1}}^t \\ s_{2^*} = s_1 \overset{\text{Tab.}}{=} s''(p_1) \end{array}\right\} \overset{\text{Tab.}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} p_2 = p(h_{2^*}, s_1) \\ \vartheta_2 = \vartheta(p_2, h_2) \end{array}\right.$$



d) Bilanz am Mischgefäß

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \dot{m}_{\mathrm{K}}\,(h_6 - h_3) + \dot{m}_{\mathrm{VD}}\,(h_2 - h_7)$$

$h_6 = h_5 \overset{\text{Tab.}}{=} h(x_5, p_5)$ isenthalp

$h_3 \overset{\text{Tab.}}{=} h''(p_{\mathrm{M}})\,, \; h_7 \overset{\text{Tab.}}{=} h'(p_{\mathrm{M}})$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{m}_{\mathrm{K}}}{\dot{m}_{\mathrm{VD}}} = \frac{h_2 - h_7}{h_6 - h_3}$$

$$\dot{Q}_{\mathrm{VD}} = \dot{m}_{\mathrm{VD}}\,(h_1 - h_8)$$

$h_8 = h_7 \overset{\text{Tab.}}{=} h'(p_{\mathrm{M}})$ isenthalp $\quad \Rightarrow \quad \dot{m}_{\mathrm{K}} = \dfrac{\dot{Q}_{\mathrm{VD}}}{h_1 - h_8}\,\dfrac{h_2 - h_7}{h_6 - h_3}\,, \quad \dot{m}_{\mathrm{VD}} = \dfrac{\dot{Q}_{\mathrm{VD}}}{h_1 - h_8}$

e)

$$\left.\begin{array}{l} P_{\mathrm{V2}}^t = \dot{m}_{\mathrm{K}}\, w_{\mathrm{V2}}^t \\ \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = 0 = h_3 - h_4 + \overset{0}{\cancel{q}}_{\mathrm{V2}} + w_{\mathrm{V2}}^t \\ h_4 - h_3 = \dfrac{1}{\eta_{s,\mathrm{V}}}\,(h_{4^*} - h_3) \\ h_{4^*} \overset{\text{Tab.}}{=} h(s_3, p_5)\,, \; s_3 = s''(p_{\mathrm{M}}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P_{\mathrm{V2}}^t = \dot{Q}_{\mathrm{VD}}\,\frac{h_{4^*} - h_3}{\eta_{\mathrm{V}}\,(h_1 - h_8)}\,\frac{h_2 - h_7}{h_6 - h_3}$$

f)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0 = \dot m_{\mathrm{VD}}\,(s_2 - s_7) + \dot m_{\mathrm{K}}\,(s_6 - s_3) + \dot S_{\mathrm{irr}}\\
&s_2 \overset{\text{Tab.}}{=\!=} s(p_{\mathrm{M}}, h_2)\\
&s_7 \overset{\text{Tab.}}{=\!=} s'(p_{\mathrm{M}})\\
&s_6 \overset{\text{Tab.}}{=\!=} s(p_{\mathrm{M}}, h_6)\\
&s_3 \overset{\text{Tab.}}{=\!=} s''(p_{\mathrm{M}})
\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
&\dot S_{\mathrm{irr}} = \dot m_{\mathrm{VD}}\,(s_7 - s_2) + \dot m_{\mathrm{K}}\,(s_3 - s_6)\\
&\dot E_V = T_u\, S_{\mathrm{irr}}\,,\ T_u = \vartheta_u = 273,15\ \mathrm{K}\\
&\epsilon = \frac{\dot Q_{\mathrm{VD}}}{\dot m_{\mathrm{VD}}\, w^t_{\mathrm{V1}} + \dot m_{\mathrm{K}}\, w^t_{\mathrm{V2}}}
\end{aligned}$$

g) reversibler Kälteprozess

$$\left.\begin{aligned}
&q_{\mathrm{VD}} + w^t + q_{\mathrm{K}} = 0\,,\ q_{\mathrm{K}} < 0\\
&\frac{q_{\mathrm{VD}}}{T_0} + \frac{q_{\mathrm{K}}}{T_u} = 0
\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad w^t = q_{\mathrm{VD}}\,\frac{T_u - T_0}{T_0}$$