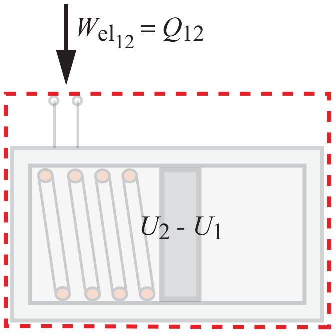
Musterlösung Thermodynamik I F13

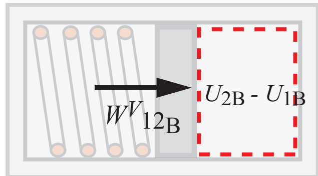
Aufgabe 1 F13 (22 Punkte)



a) Gasmassen aus thermischer Zustandsgleichung:

$$m_{1A} = \frac{p_1 V_{1A}}{R T_{1A}}\,, \quad m_{1B} = \frac{p_1 V_{1B}}{R T_{1B}}$$

b) Wärmemenge: $Q_{12} = \dot{W}_{el}\,\Delta t$



c) Zustand 2 ($t = t_2$)

			Unbekannte
Massenbilanz:			
System A:	(1)	$m_A = const = \frac{p_{2A} V_{2A}}{R T_{2A}}$	p_{2A}, V_{2A}, T_{2A}
System B:	(2)	$m_B = const = \frac{p_{2B} V_{2B}}{R T_{2B}}$	p_{2B}, V_{2B}, T_{2A}
Nebenbedingung:	(3)	$p_{2A} = p_{2B}\ (= p_2)$	
Volumenbilanz:	(4)	$V_{1A} + V_{1B} = V_{2A} + V_{2B}$	
Energiebilanz Gesamtsystem:	(5)	$Q_{12} = U_{2A} - U_{1A} + U_{2B} - U_{1B}$	$U_{2A} - U_{1A}, U_{2B} - U_{1B}$
	(6)	$U_{2A} - U_{1A} = m_A c_v \left(T_{2A} - T_{1A}\right)$	c_v
	(7)	$U_{2B} - U_{1B} = m_B c_v \left(T_{2B} - T_{1B}\right)$	
	(8)	$c_v = \frac{1}{\kappa - 1} R$	
Isentroper Prozess Kammer B:	(9)	$p_{2B}\, V_{2B}^{\kappa} = p_1\, V_{1B}^{\kappa}$	
Summe:	9		9

d) Energiebilanz Kammer B:

$$W_B = W^V_{B_{12}} = U_{2B} - U_{1B}$$

e) Entropieänderungen:

$$S_{2A} - S_{1A} = m_{1A}\left(c_v \ln\left(\frac{T_{2A}}{T_{1A}}\right) + R \ln\left(\frac{V_{2A}}{V_{1A}}\right)\right)$$

$$S_{2B} - S_{2B} = m_{1B}\left(c_v \ln\left(\frac{T_{2B}}{T_{1B}}\right) + R \ln\left(\frac{V_{2B}}{V_{1B}}\right)\right) = 0 \quad \text{siehe Gl. (9)}$$

f) Polytropenexponent n

Für Kammer A gilt:

$$\frac{s_{2\mathrm{A}} - s_{2\mathrm{A}}}{R} = \frac{c_v}{R} \ln\left(\frac{T_{2\mathrm{A}}}{T_{1\mathrm{A}}}\right) + \ln\left(\frac{V_{2\mathrm{A}}}{V_{1\mathrm{A}}}\right) = \frac{c_p}{R} \ln\left(\frac{T_{2\mathrm{A}}}{T_{1\mathrm{A}}}\right) - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

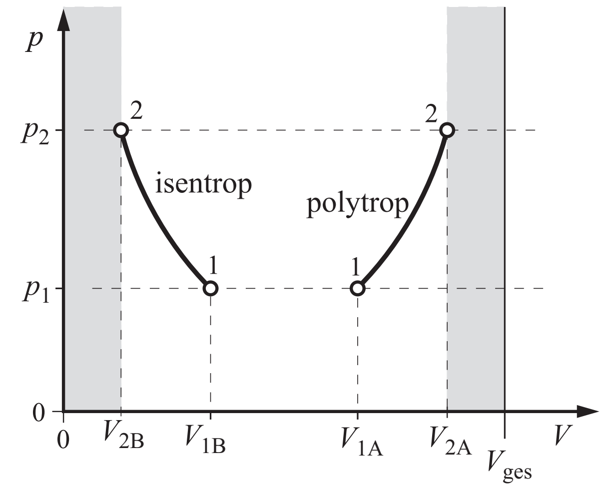
bzw. alternativ aus der thermischen Zustandsgleichung

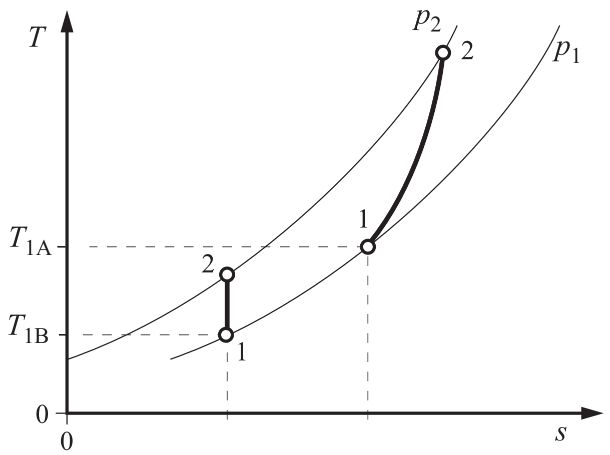
$$\frac{p_1 V_{1\mathrm{A}}}{p_2 V_{2\mathrm{A}}} \left(\frac{V_{1\mathrm{A}}}{V_{2\mathrm{A}}}\right)^{n-1} = \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{V_{1\mathrm{A}}}{V_{2\mathrm{A}}}\right)^{n} = \frac{T_{1\mathrm{A}}}{T_{2\mathrm{A}}} \left(\frac{V_{2\mathrm{A}}}{V_{1\mathrm{A}}}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{V_{1\mathrm{A}}}{V_{2\mathrm{A}}}\right)^{n} \left(\frac{V_{1\mathrm{A}}}{V_{2\mathrm{A}}}\right)^{n-1} = \left(\frac{V_{1\mathrm{A}}}{V_{2\mathrm{A}}}\right)^{n\,(n-1)} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_{1\mathrm{A}}}{T_{2\mathrm{A}}}$$

$$n\,(n-1) = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1} \frac{T_{1\mathrm{A}}}{T_{2\mathrm{A}}}\right)}{\ln\left(\frac{V_{1\mathrm{A}}}{V_{2\mathrm{A}}}\right)} \quad \Rightarrow \quad n_{1,2},\ (n < 0 \text{ ist die gültige Lösung})$$

g), h) siehe Abbildungen





Aufgabe 2 F13 (34 Punkte)

a) siehe Abbildungen

b)

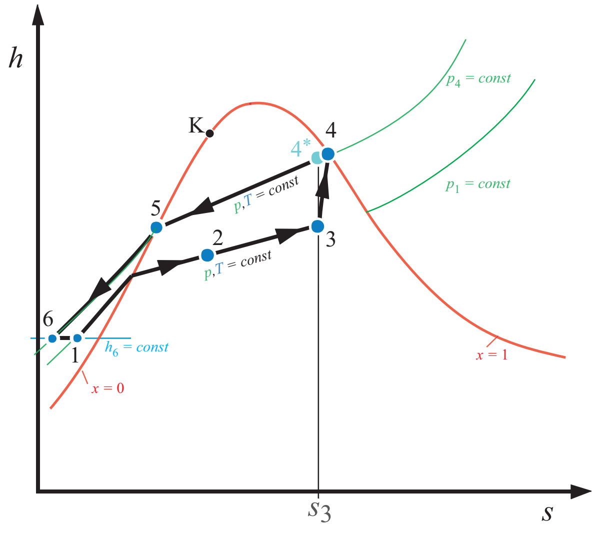
$$q_{56} = h_6 - h_5 \quad (< 0)$$

$$h_6 = h_1\,,\ \vartheta_1 = \vartheta_{\mathrm{K}} - \Delta\vartheta_{\mathrm{K}}$$

$$\text{aus Tab.:}\quad h_1 = h(p_1, \vartheta_1)$$

$$\vartheta_5 = \vartheta_4 = \vartheta_{\mathrm{R}} + \Delta\vartheta_{\mathrm{K}}$$

$$\text{aus Tab.:}\quad h_5 = h'(\vartheta_5)$$



c)

$$w_{34}^t = h_4 - h_3 \quad (< 0)$$

$$\text{aus Tab.:}\quad p_2 = p(\vartheta_5)\,,\ h_4 = h''(\vartheta_4)$$

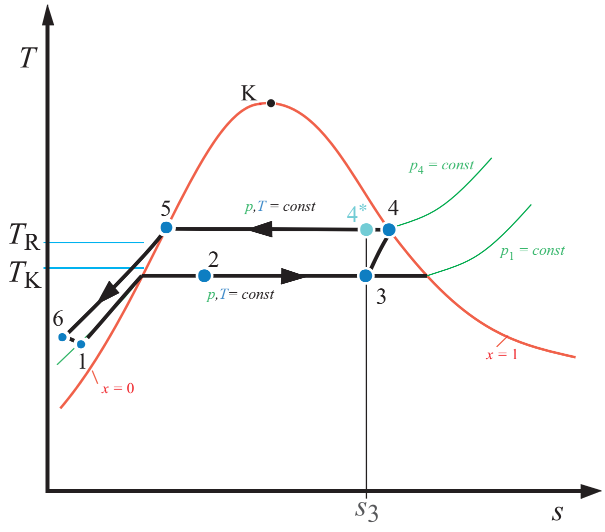
$$(1)\quad h_4 - h_3(s_3, p_1) = \frac{h_{4^*}(s_{4^8}, p_2) - h_3(s_3, p_1)}{\eta_{s,\mathrm{V}}}$$

$$(2)\quad s_{4^*} = s_3$$

---

iterativ aus Tab. oder grafisch aus Diagramm: $\Rightarrow \quad h_3$

d)



$$q_{12} = h_2 - h_1 \quad (> 0)$$

$$\text{aus Tab.:}\quad h_1 = h(p_1, \vartheta_1)\ \text{s.o.}$$

$$\left.\begin{aligned} &h_3 \quad \text{aus c)} \\ &q_{23} = -q_{56} \quad \text{aus b)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ h_2$$

$$x_2 = \frac{h_2 - h_2'}{h_2'' - h_2'}$$

$$\text{aus Tab.:}\quad h_2'' = h(x = 1, p_1)\,,\ h' = h(x = 0, p_1)$$

e) Exergieverlust an der Drossel

$$e_V = h_6 - h_1 - T_u\,(s_6 - s_1) = T_u\,(s_1 - s_6) \quad (> 0)$$

$$\text{aus Tab.:}\quad s_1 = s(p_1, \vartheta_1)\,,\ s_6 = s(h_6, p_2)$$

f) Leistungsziffer

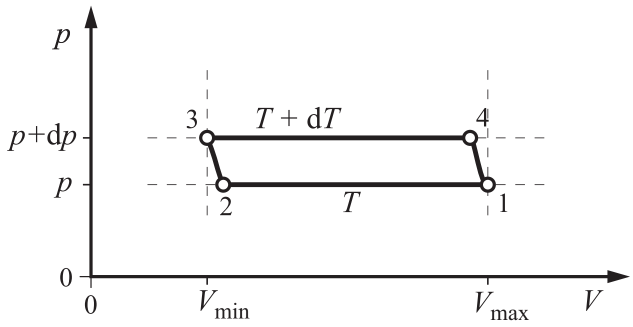
$$\epsilon = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{-q_{45}}{w_{34}^t} = \frac{h_4 - h_5}{h_4 - h_3}$$

Leistungsziffer ideal:

$$\epsilon^{\mathrm{id}} = \frac{-q_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{id}}}{w_{\mathrm{zu}}^{\mathrm{id}}} : \left.\begin{aligned} &\text{Energiebilanz: } q_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{id}} + q_{\mathrm{zu}}^{\mathrm{id}} + w_{\mathrm{zu}}^{\mathrm{id}} = 0 \\ &\text{Entropiebilanz: } \frac{q_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{id}}}{T_{\mathrm{R}}} + \frac{q_{\mathrm{zu}}^{\mathrm{id}}}{T_{\mathrm{K}}} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \epsilon = \frac{1}{1 - T_{\mathrm{R}}/T_{\mathrm{K}}} \ \Rightarrow\ \frac{\epsilon}{\epsilon^{\mathrm{id}}} = \frac{\frac{h_4 - h_5}{h_4 - h_3}}{1 - T_{\mathrm{K}}/T_{\mathrm{R}}} \quad (< 1)$$

Thermodynamik I Aufgabe 3 (13 Punkte)

a) siehe Abbildung



Prozess	Art der Zustdsänd.	Wärmezufuhr > 0	0	< 0
1 —> 2	isotherme Komp.			x
2 —> 3	isentrope Komp.		x	
3 —> 4	isotherme Exp.	x		
4 —> 1	isentrope Exp.		x	

Ein Carnotprozeess besteht aus Isothermen und Isentropen. Im speziellen Fall des Photonengases sind die Isothermen identisch mit Isobaren.
Wegen der Reibungsfreiheit des Carnotprozesses ist die isentrope Zustandsänderung adiabat. Beim Arbeitsprozess wird bei der höheren Temperatur, hier auch bei dem höheren Druck, Wärme aufgenommen.

b) Die abgegebene Arbeit $\delta W < 0$ ist gleich der (negativen) Fläche unter der Kurve

$$-\delta W \approx (V_{\max} - V_{\min})\,\mathrm{d}p$$

c) Die ausgetauchte Wärmemenge errechnet sich mit der Energiebilanz zu

$$\delta Q = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V$$

Die Wärme wird im Prozessschritt $3 \to 4$ zugeführt:

$$Q_{34} = U_4 - U_3 + \int_3^4 p\,\mathrm{d}V \approx U_4 - U_3 + p\,(V_{\max} - V_{\min})$$

Damit ergibt sich für den thermischen Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = \frac{-\delta W}{Q_{34}} = \frac{(V_{\max} - V_{\min})\,\mathrm{d}p}{U_4 - U_3 + p\,(V_{\max} - V_{\min})}$$

der mit dem Carnotschen Wirkungsgrad des Prozesses gleich sein soll:

$$\eta_{th} \stackrel{!}{=} \eta_C = 1 - \frac{T - \mathrm{d}T}{T} = \frac{\mathrm{d}T}{T}$$

Daraus ergibt sich eine Beziehung für $\mathrm{d}U$:

$$\frac{(V_{\max} - V_{\min})\,\mathrm{d}p}{U_4 - U_3 + p\,(V_{\min} - V_{\max})} = \frac{\mathrm{d}T}{T}$$

Mit $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = 4\,const\,T^3$ folgt: $\quad U_4 - U_3 = 3\,const T^4\,(V_4 - V_3) = 4\,\dfrac{\sigma}{c_0}\,T^4\,(V_4 - V_3)$

bzw. $\quad U = 3\,p\,V = 4\,\dfrac{\sigma}{c_0}\,T^4\,V \;(= 3pV)$.

d) Mit der Definition der Entropie

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q^{\mathrm{rev}}}{T}$$

erhält man wegen

$$Q_{34} = T\,(S_4 - S_3) = U_4 - U_3 + p\,(V_3 - V_4) = 3\,const\,T^4\,(V_4 - V_3) + const\,T^4\,(V_4 - V_3)$$

$$S_4 - S_3 = 4\,const\,T^3\,(V_4 - V_3)$$

oder

$$S = 4\,const\,T^3\,V = \frac{16}{3}\,\frac{\sigma}{c_0}\,T^3\,V = \frac{4}{3}\,\frac{U}{T} = \frac{H}{T}$$

Bem.: Weitere Betrachtungen führen auf

$$H = U + pV = 4pV\,,\; S = \frac{4}{3}\,\frac{U}{T} = \frac{H}{T}\,,\;\;, A = -\frac{1}{3}\,U\,,\; G = H - TS = 0\,,\; C_V = 4\,\frac{U}{T}\,,\; C_P = \frac{4}{3}\,C_V\,,\; \kappa = \frac{4}{3}$$