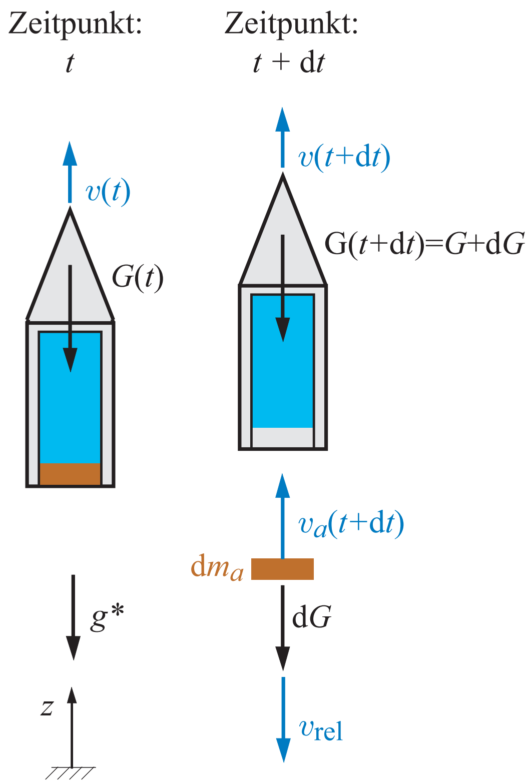
**Dynamik**

## Lösung der Aufgabe 5a

a) Abbrennen der ersten Stufe: $0 \leq t \leq \Delta t$




Wegen des kontinuierlichen Massenverlustes der Rakete durch den Strom ausströmender Gase betrachtet man die Impulsänderung ab einem beliebigen Zeitpunkt $t$ im differentiellen Zeitintervall $\mathrm{d}t$ für das System aus Rakete <u>und</u> ausgestoßener Masse $\mathrm{d}m_a$:

$$\vec{p}_{\mathrm{sys}}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}_{\mathrm{sys}}(t) = \sum \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

Der Impuls $\vec{p}$ ist dabei durch $\vec{p} = m\vec{v}$ definiert. Auf der linken Seite steht die Impulsänderung des Systems. Damit die Beziehung gilt, müssen die Implse der einzelnen Massen von einem *Absolutsystem* aus beschrieben werden. Auf der rechten Seite ist die Wirkung der Summe aller *äußeren* Kräfte, die am System angreifen, zu bilanzieren.

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{\mathrm{sys}}(t + \mathrm{d}t) &= \vec{p}_R(t) + \mathrm{d}\vec{p}_R + \vec{p}_a(t + \mathrm{d}t) \\
\vec{p}_{\mathrm{sys}}(t) &= \vec{p}_R(t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{p}_R + \vec{p}_a(t + \mathrm{d}t) = \vec{G}\,\mathrm{d}t = m\vec{g}^*\,\mathrm{d}t$$

oder, wenn die Größen der Rakete nciht indiziert werden ($\vec{p}_R = m\vec{v}$),

$$\mathrm{d}(m\vec{v}) + \mathrm{d}m_a\,\vec{v}_a(t + \mathrm{d}t) = m\,\vec{g}^*\,\mathrm{d}t.$$

Darin sind noch die Absolutgeschwindigkeit der austretenden Gase und die Masse $dm_a$ zu spezifizieren.

Es gilt allgemein in Relativsystemen $\vec{v}_{\mathrm{abs}} = \vec{v}_{\mathrm{f}} + \vec{v}_{\mathrm{rel}}$ und damit hier wegen

$$\vec{v}_{\mathrm{f}} = \vec{v}(t + dt)\,, \quad \vec{v}_{\mathrm{abs}} = \vec{v}_a \quad \text{und} \quad \vec{v}_{\mathrm{rel}} = const$$

$$\vec{v}_a(t + \mathrm{d}t) = \vec{v}(t + \mathrm{d}t) + \vec{v}_{\mathrm{rel}} = \vec{v}(t) + \mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}_{\mathrm{rel}}$$

Außerdem liefert eine Massenbetrachtung, dass die Masse der austretenden Gase die Masse der Rakete verringert:

$$\mathrm{d}m = -\mathrm{d}m_a$$

Damit ergibt sich die Differentialgleichung

$$m\,\mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}\,\mathrm{d}m - \mathrm{d}m\,(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}_{\mathrm{rel}}) = m\,\vec{g}^*\,\mathrm{d}t$$

Im Grenzübergang $\mathrm{d}v \to 0$ und $\mathrm{d}m \to 0$ ist das Produkt der Differentiale $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\vec{v}$ im Vergleich mit den anderen Termen von höherer Ordnung klein. Es entfällt daher.

Nach Division durch die Masse $m$ verbleibt die Differentialgleichung[1]

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{g}^*\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}m}{m}\,\vec{v}_{\mathrm{rel}}.$$

Diese Vektorbeziehung werten wir für die $z$-Richtung mit den in der Abbildung getroffenen Vereinbarungen für den Richtungssinn der Vektoren aus. Dies liefert:

$$\mathrm{d}v = -g^*\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}m}{m}\,v_{\mathrm{rel}}$$

Diskussion dieser Beziehung anhand der Vorzeichen der Terme in dieser Gleichung.

1. Die Erdbeschleunigung bewirkt richtigerweise eine negative Geschwindigkeitsänderung der Rakete

2. Eine Relativgeschwindigkeit in negative $z$-Richtung also $v_{\mathrm{rel}} > 0$ sollte in Übereinstimmung mit dem Rückstoßprinzip eine Zunahme der Geschwindigkeit der Rakete liefern. Da die Massenänderung $\mathrm{d}m$ negativ ist, wird auch dies durch die Gleichung wiedergegeben

Diese Gleichung lässt sich integrieren. Mit den Anfangsbedingungen $v(t = 0) = 0$ und $m(t = 0) = m_0$ ergibt sich

$$v(t) = -g^*t - v_{\mathrm{rel}}\,\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -g^*t + v_{\mathrm{rel}}\,\ln\left(\frac{m_0}{m}\right).$$

und

$$v(\Delta t) = -g^*\Delta t + v_{\mathrm{rel}}\,\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) = -g^*\Delta t + v_{\mathrm{rel}}\,\ln\mu.$$

Die Zahlenwerte liefern: $v(\Delta t) \approx 5000\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Die Flüghöhe bis zum Abbrand der ersten Stufe ergibt sich aus der Definition der Geschwindigkeit $v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ aus dem Integral der Differentialgleichung

$$\mathrm{d}z = -g^*t\,\mathrm{d}t - v_{\mathrm{rel}}\,\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)\,\mathrm{d}t$$

der zweite Summand erfordert Substitution. Es ist wegen[2]

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = const = \frac{m_1 - m_0}{\Delta t} \stackrel{!}{=} -\dot{m}$$

[1]Hinweis: An dieser Stelle überzeugt man sich, ob die Gleichung dimensionsmäßig richtig ist und ob alle Summanden vom gleichen Charakter sind. Hier haben alle Summanden in der Tat die Einheit einer Geschwindigkeit und alle Summanden sind Vektoren. Außerdem überzeugt man sich, ob tatsächlich alle Terme die gleiche Größenordnung haben. Dies ist hier auch gegeben, da jeder Summand genau ein Differential enthält.

[2]Eine andere Möglichkeit ist die Integration über der Zeit beizubehalten und die Zeitfunktion $m(t) = m_0 - \dot{m}\,t$ im Logarithmus einzusetzen.

zunächst

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}m}{\dot{m}}$$

$$\mathrm{d}z = -g^* t\,\mathrm{d}t + \frac{m_0}{\dot{m}}\, v_{\mathrm{rel}}\, \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)\, \mathrm{d}\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

Mit dem Integral

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\,(\ln x - 1)$$

und den Anfangsbedingungen bei $t = 0$ folgt

$$z(t) \;=\; -\frac{1}{2}\,g^*\,t^2 \;+\; \frac{m_0}{\dot{m}}\,v_{\mathrm{rel}}\left(\frac{m}{m_0}\left(\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) - 1\right) + 1\right) \quad \text{mit} \quad \dot{m} = \frac{m_0 - m_1}{\Delta t}$$

Die Höhe $h_1$ ergibt sich zu

$$h_1 = z(\Delta t) = -\,\frac{1}{2}\,g^*\,\Delta t^2 \;+\; v_{\mathrm{rel}}\,\Delta t\,\ln\mu.$$

Aus dieser Formel lässt sich bei vorgegebenem Massenverhältnis eine Bedingung für die Brenndauer $\Delta t_{\max}$ ableiten, für die eine Flughöhe $h_1$ erreicht werden kann:

$$h_1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\mathrm{rel}}\,\ln\mu \geq \frac{1}{2}\,g^*\,\Delta t$$

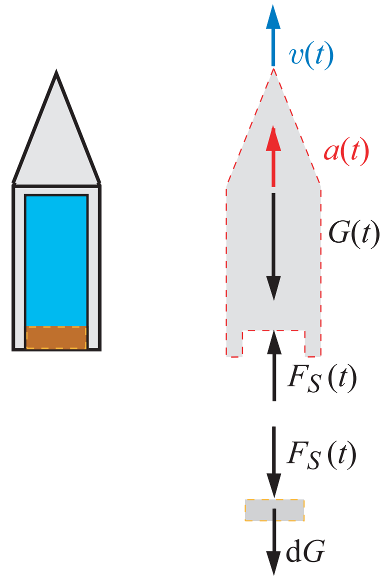
Dies liefert:

$$\Delta t \leq \frac{v_{\mathrm{rel}}}{2\,g^*}\,\ln\mu = \Delta t_{\max}$$

Entsprechend schnell muss der Abbrand des Raketentreibstoffs vonstatten gehen. Mit $\mu = \dfrac{m_0}{m_0 - \dot{m}\Delta t}$ lässt sich auch eine Angabe über den notwendigen Massenstrom machen.

b) Wir betrachten jetzt das Teilsystem „Rakete“ zum Zeitpunkt $t$. Dadurch wird die Wechselwirkungskraft zwischen Rakete und ausgestoßener Masse $\mathrm{d}m_a$ als äußere Kraft sichtbar. Sie ist die Schubkraft $\vec{F}_S$ zum Zeitpunkt $t$, die die Rakete beschleunigt.

System “Rakete” mit Gaspaket d$m_a$ zum Zeitpunkt $t$ mit Freischnitten




An der so definierten Masse greift neben der Schubkraft $\vec{F}_S$ noch die Gewichtskraft $\vec{G}$ an. Die Summe dieser Kräfte führt nach Newton zu der Bechleunigung $\vec{a}$ der mit dem Teilsystem „Rakete“ Masse.

$$m\,\vec{a} = \vec{F}_S + \vec{G}$$

Mit der Definition der Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

und mit der Beziehung

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{g}^*\,\mathrm{d}t \;+\; \frac{\mathrm{d}m}{m}\,\vec{v}_{\mathrm{rel}} = \vec{g}^*\,\mathrm{d}t \;-\dot{m}\,\vec{v}_{\mathrm{rel}}$$

gilt

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{a} = m\,\vec{g}^{*} \;+\; \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}_{\mathrm{rel}} = m\,\vec{g}^{*} \;-\; \dot{m}\,\vec{v}_{\mathrm{rel}}.$$

Es folgt damit

$$m\,\vec{g}^{*} \;-\; \dot{m}\,\vec{v}_{\mathrm{rel}} \;=\; \vec{F}_S + \vec{G}$$

Die Gewichtskraft entfällt demnach und es verbleibt

$$-\,\dot{m}\,\vec{v}_{\mathrm{rel}} \;=\; \vec{F}_S.$$

Die Schubkraft ist einsichtigerweise nur vom ausgestoßenen Massenstrom und von der Relaltivgeschwindigkeit der austretenden Gase in Bezug auf die Rakete abhängig und dem Prdukt aus beiden proportional. Außerdem sind Richtungssinn von Schubkraft und Relativgeschwindigkeit entgegengesetzt.

Für die $z$-Richtung und dem im Freischnitt definierten Richtungssinn der Vektoren folgt damit:

$$F_S \;= \dot{m}\,v_{\mathrm{rel}}$$

Diese Beziehung gilt zu jedem Zeitpunkt. Es ist also nicht notwendig, dass $\dot{m}, v_{\mathrm{rel}}$ oder beide konstant sind.

c) Die gesamte durch Abbrand der ersten Stufe erreichbare maximale Flughöhe $h_{\mathrm{max}}$ ergibt sich durch den anschließenden weiteren Flug im Schwerefeld mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_1$:

$$h_{\mathrm{max}} = h_1 + \Delta h$$

Der zusätzliche Höhengewinn $\Delta h$ nach Ausbrannt des Treibwerkes, lässt sich unter Vernachlässigung von Widerstandskräften aus dem Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + m\,g\,h_1 = m\,g\,(h_1 + \Delta H)$$

berechnen. Es ergibt sich

$$\Delta h = \frac{v_1^2}{2\,g^{*}}$$

und die maximal erreichbare Höhe ist

$$h_{\mathrm{max}} = h_1 + \frac{v_1^2}{2\,g^{*}}\,.$$