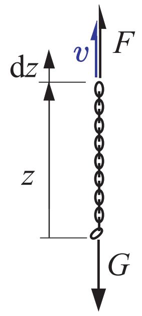
Dynamik

Aufgabe 5c



a) *Konstante Beschleunigung*

Falls $a = \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2 = const$ ist die Bewegung des Kettenendes vorgeschrieben. Mit $v(t=0) = 0$ und $z(t=0) = z_0$ folgt:

$$v(z) = a\,t\,, \quad z = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + z_0$$

Der Newton in z-Richtung für veränderliche Masse lautet für den Freischnitt

$$\frac{\mathrm{d}(m(t)\,v(t))}{\mathrm{d}t} = F(t) - G(t)$$

Die zeitlich veränderliche Masse und das Gewicht sind an die Kettenlänge gekoppelt:

$$m(t) = \mu\,z(t) = \mu\,\Big(\frac{1}{2}\,a\,t^2 + z_0\Big)\,, \quad G(t) = m(t)\,g$$

Damit folgt

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{2}\,a^2\,t^3 + z_0\,a\,t\Big) = F(t) - \mu\,\Big(\frac{1}{2}\,a\,t^2 + z_0\Big)\,g$$

und ausgerechnet:

$$F(t) = \mu\,g\,\left(\frac{a\,t^2}{2}\,\Big(1 + 3\,\frac{a}{g}\Big) + z_0\,(1 + \frac{a}{g})\right)$$

bzw. mit $a\,t^2/2 = z - z_0$

$$F(z) = \mu\,g\,z_0\,\left(\frac{z}{z_0}\,\Big(1 + 3\,\frac{a}{g}\Big) + 2\,\frac{a}{g}\right)$$

Kontrolle:

Speziell für $z = z_0$ leifert die Formel $F(z_0) = \mu\,z_0\,\Big(g + a\Big)$, was bedeutet, dass die notwendige Kraft das Anfangsgewicht $G_0 = \mu\,z_0\,g$ und die Trägheit der Masse $\mu\,z_0\,a$ ausgleichen muss. $\surd$

Wenn die Kette vom Boden aufgenommen wird, also $z_0 = 0$ ist, ergibt sich ein linearer Kraftanstieg nach

$$F(z) = \mu\,g\,z\,\Big(1 + 3\,\frac{a}{g}\Big),$$

wobei bei $t = 0, z = 0$ die Kraft natürlich noch Null ist, $F(0) = 0$, damit die Beschleunigung endlich bleibt. $\surd$

b) *Konstante Kraft*

Der Newton in z-Richtung für veränderliche Masse lautet für den Freischnitt

$$\frac{\mathrm{d}(m(t)\,v(t))}{\mathrm{d}t} = F - m(t)\,g,$$

wobei $v = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ ist. Es ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(z(t)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big) = \frac{F}{\mu} - z\,g$$

Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung.