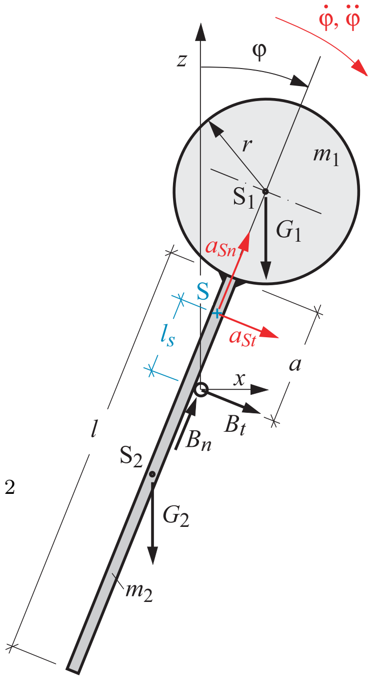
Lösung Aufgabe 11a



a) 1. Verlustlose Bewegung ⇒ Energieerhaltungssatz:[1]

$$T(\varphi) + V(\varphi) \;=\; T_0 + V_0 + \sum W\Big|_0^{\varphi}$$

Bezogen auf den ruhenden Punkt B:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\,J_{\mathrm{B}_1}\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,J_{\mathrm{B}_2}\,\dot{\varphi}^2 \;=\; (m_1+m_2)\,g\,(z_s(\varphi=0) - z_s(\varphi))$$

mit

$$z_s(\varphi=0) - z_s(\varphi) \;=\; l_s\,(1-\cos\varphi)$$

und

$$\begin{aligned} J_\mathrm{B} \;&=\; J_{\mathrm{B}_1} + J_{\mathrm{B}_2} = J_{\mathrm{S}_1} + m_1\,(a+r)^2 \;+\; J_{\mathrm{S}_2} + m_2\left(\frac{l}{2}-a\right)^2 \\ (2) \qquad &=\; \frac{1}{2}\,m_1\,r^2 + m_1\,(a+r)^2 \;+\; \frac{1}{12}\,m_2\,l^2 + m_2\left(\frac{l}{2}-a\right)^2 \\ &\overset{\text{hier}}{=}\; \frac{23}{2}\,m_1\,r^2 \end{aligned}$$

sowie

$$(3) \qquad l_s = \frac{m_1\,(a+r) - m_2\,(\frac{l}{2}-a)}{m_1+m_2} \overset{\text{hier}}{=} -\frac{1}{4}\,r \;<\; 0\,.$$

Insbesondere die Nichtlinearität bzgl. der Ableitung wird üblicherweise eliminiert. Nach zeitlicher Ableitung erhält man

$$J_\mathrm{B}\,\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} \;=\; g\,l_S\,\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,.$$

Diese Gleichung ist außer für den uninteressanten Fall $\dot{\varphi}=0$ erfüllt, falls

$$J_\mathrm{B}\,\ddot{\varphi} \;=\; g\,l_S\,\sin\varphi\,,$$

bzw.

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{J_\mathrm{B}}\,(m_1+m_2)\;l_s\,\sin\varphi \;=\; 0\,.$$

Dies liefert mit den Angaben der Aufgabenstellung

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{23}\,\frac{g}{r}\,\sin\varphi = 0$$

2. Drallsatz um im Inertialsystem ruhenden Punkt B:[2]

$$(4) \qquad J_\mathrm{B}\,\ddot{\varphi} = m_1 g\,(a+r)\,\sin\varphi \;-\; m_2 g\left(\frac{l}{2}-a\right)\,\sin\varphi$$

Damit haben wir dasselbe Ergebnis erzielt, wie mittels des Energieerhaltungssatzes.

---

[1] Alternativen für die Formulierung der kinetischen Energien:
- bez. auf einen im Bezugssystem ruhenden Punkt
- bez. auf den Schwerpunkt

[2] Alternativen für die Formulierung des Drallsatzes:
- bez. auf einen in einem Intertialsystem ruhenden Punkt
- bez. auf den Schwerpunkt

b) Aus der Differentialgleichung liest man den Parameter

$$\omega_0^2 = \frac{g}{J_\mathrm{B}} \left(m_1 \, (a+r) - m_2 \, (\frac{l}{2} - a) \right) = -\frac{g}{J_\mathrm{B}} \, (m_1 + m_2) \, l_s \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{2}{23} \, \frac{g}{r}$$

Falls w_0^2 positiv ist, kann dieser Parameter als Eigenkreisfrequenz einer Schwingung interpretiert werden. Dies ist dann der Fall, falls der Gesamtschwerpunkt des Systems unterhalb der Lagerung bei B liegt. Dies erfordert $l_s < 0$, was hier mit $l_s = -1/4\, r$ tatsächlich vorliegt.

Dies setzt eine Schranke für den Abstand a. Man erhält

$$l_s = \frac{m_1 \, (a+r) - m_2 \, (\frac{l}{2} - a)}{m_1 + m_2} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \leq \frac{\frac{l}{2} \, m_2 - r \, m_1}{m_1 + m_2} = a_\mathrm{max} \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{5}{4} r = 0,1875 \text{ m} \, .$$

Die Eigenkreisfrequenz wird dann

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \, (m_1 + m_2) \, (-l_s)}{J_\mathrm{B}}} \stackrel{\text{hier}}{=} \sqrt{\frac{2}{23} \, \frac{g}{r}} \approx 2,4 \, \frac{1}{\mathrm{s}} \, .$$

Zwischen Eigenkreisfrequenz und Schwingungsdauer T besteht der Zusammenhang

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 2,6 \text{ s} \, .$$

c) Zur Lösung wird die Differentialgleichung vollständig linearisiert, indem $\sin\varphi \approx \varphi$ gesetzt wird. Für kleine Ausschläge des Pendels lautet die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \, \varphi = 0 \, .$$

Der Lösungsansatz

$$\varphi(t) = \varphi_0 \, \cos(\omega_0 \, t + \psi)$$

stellt eine allgemeine Lösung der Schwingung mit Amplitude φ_0 und Phasenverschiebung ψ dar. Diese allgemeine Lösung erfüllt die gesetzten Anfangsbedingungen

$$\varphi(t=0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0 \, ,$$

falls die Phasenverschiebung $\psi = 0$ ist. Die spezielle Lösung lautet daher:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \, \cos(\omega_0 \, t)$$

d) Für die Auflagerreaktionen stehen noch der Schwerpunktsatz und der Drallsatz um den Schwerpunkt S zur Verfügung.

Drallsatz um Schwerpunkt S:

$$J_S \, \ddot{\varphi} = -B_t \, l_s$$

mit

$$J_\mathrm{S} = J_\mathrm{B} - (m_1 + m_2) \, l_s^2 \quad \text{und} \quad \ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \, \sin\varphi$$

Ausrechnung liefert

$$B_t = \left(1 - \frac{(m_1 + m_2) \, l_s^2}{J_\mathrm{B}} \right) (m_1 + m_2) \, g \, \sin\varphi \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{90}{23} \, m_1 \, g \, \sin\varphi \, .$$

Das Ergebnis lässt sich noch durch Anwendung des Schwerpunktsatzes in tangentiale Richtung überprüfen.

Interessant an diesem Ergebnis ist, dass für die spezielle Wahl $J_\mathrm{B} = (m_1 + m_2)\, l_s^2$ also

$$J_{\mathrm{S}_1} + m_1\,(a+r)^2 + J_{\mathrm{S}_2} + m_2\,(\frac{l}{2} - a)^2 \overset{!}{=} \frac{\Big(m_1\,(a+r) - m_2\,(\frac{l}{2} - a)\Big)^2}{m_1 + m_2}$$

die Auflagerkraft für alle Winkel φ verschwindet. In diesem Fall ist die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_s}}$$

mit derjenigen des mathematischen Pendels mit einer Punktmasse am Faden der Länge l_s identisch. Eine solche Anordnung ist erstrebenswert um Querkräfte an Drehlagern, zum Beispiel bei Drehtüren, zu vermeiden.

Der Schwerpunktsatz in normale Richtung liefert

$$(m_1 + m_2)\, a_{Sn} = B_n - (m_1 + m_2)\, g\, \cos\varphi$$

mit

$$a_{Sn} = -l_s\, \dot{\varphi}^2$$

und

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{2\,(m_1 + m_2)\, g\, l_s\, (1 - \cos\varphi)}{J_B} \overset{\text{hier}}{=} \frac{4}{23}\, \frac{g}{r}\, (1 - \cos\varphi)$$

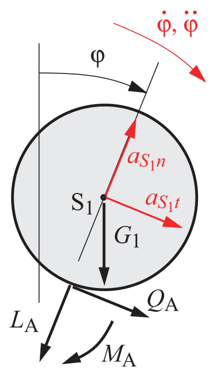
aus Gl. (1). Also ergibt sich

$$B_n = (m_1 + m_2)\, g\, \left(\cos\varphi - \frac{2\,(m_1 + m_2)\, l_s^2\, (1 - \cos\varphi)}{J_B}\right) \overset{\text{hier}}{=} 4\, m_1\, g\, \left(\cos\varphi - \frac{1 - \cos\varphi}{23}\right)\,.$$

e) Die Beantwortung dieser Frage erfordert einen weiteren Freischnitt zum Beispiel der Scheibe 1.

Hier gilt:

$$\begin{aligned}
m_1\, a_{S_1 t} &= Q_\mathrm{A} + m_1 g\, \sin\varphi && \text{mit} \quad a_{S_1 t} = +(a+r)\, \ddot{\varphi} \\
m_1\, a_{S_1 n} &= -L_\mathrm{A} - m_1 g\, \cos\varphi && \text{mit} \quad a_{S_1 n} = -(a+r)\, \dot{\varphi}^2 \\
J_{\mathrm{S}_1}\, \ddot{\varphi} &= -Q_\mathrm{A}\, r + M_\mathrm{A}
\end{aligned}$$



Darin sind die Schnittreaktionen die einzigen Unbekannten.