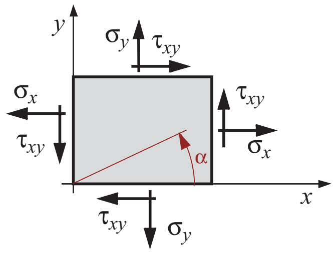
Festigkeitslehre

Lösung zu Aufgabe 11b)

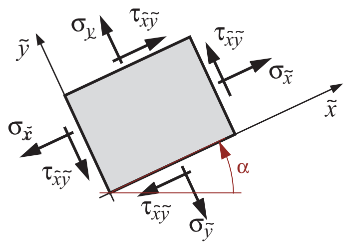
Grundsätzliches und Vorüberlegungen:



Hookesches Gesetz für den zweidimensionalen Spannungszustand:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right) \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right) \tag{2}$$

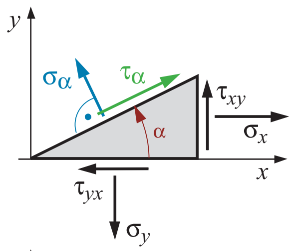


Die beiden Messwerte $\varepsilon_x = \varepsilon_1$ und $\varepsilon_y = \varepsilon_3$ liefern nach Umstellung die Spannungen

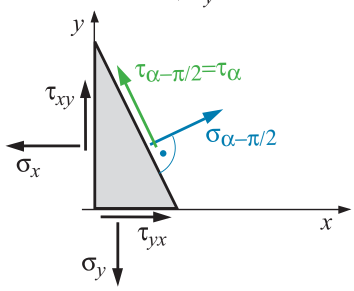
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1 + \nu\,\varepsilon_3\right) \tag{3}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_3 + \nu\,\varepsilon_1\right) \tag{4}$$

Dies erlaubt uns unmittelbar, die Spannungen σ_x und σ_y aus den Messwerten ε_1 und ε_1 zu bestimmen.



Die Messung der Dehnung unter einer Richtung im Winkel α liefert analog zu den Gleichungen (1) und (2) im gedrehten Koordinatensystem:



$$\varepsilon_{\tilde{x}} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\tilde{x}} - \nu\,\sigma_{\tilde{y}}\right) \tag{5}$$

$$\varepsilon_{\tilde{y}} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\tilde{y}} - \nu\,\sigma_{\tilde{x}}\right) \tag{6}$$

Aus dem Gleichgewicht am dreieckigen Element gilt für die Normalspannungen:

$$\sigma_{\tilde{y}} = \frac{\sigma_y+\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\cos(2\alpha) - \tau_{xy}\sin(2\alpha) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\tilde{x}} &= \frac{\sigma_y+\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\cos(2(\alpha-\pi/2)) - \tau_{xy}\sin(2(\alpha-\pi/2)) \\ &= \frac{\sigma_y+\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\cos(2\alpha) + \tau_{xy}\sin(2\alpha)\end{aligned} \tag{8}$$

Eingesetzt in die Gleichungen (5) und (6) liefert dies:

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_y+\sigma_x}{2}(1-\nu) - \frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}(1+\nu)\cos(2\alpha) + \tau_{xy}(1+\nu)\sin(2\alpha)\right) \tag{9}$$

$$\varepsilon_{\tilde{y}} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_y+\sigma_x}{2}(1-\nu) + \frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}(1+\nu)\cos(2\alpha) - \tau_{xy}(1+\nu)\sin(2\alpha)\right) \tag{10}$$

Durch Gleichung (9) steht mit den Normalspannungen σ_x und σ_y und dem dritten Messwert $\varepsilon_{\tilde{x}} = \varepsilon_2$ eine Beziehung für die gesuchte Schubspannung τ_{xy} zur Verfügung:

$$\tau_{xy} = \frac{2\,E\,\varepsilon_{\tilde{x}} - (\sigma_y+\sigma_x)(1-\nu) + (\sigma_y+\sigma_x)(1+\nu)\cos(2\alpha)}{2(1+\nu)\sin(2\alpha)} \quad \text{falls} \quad \sin(2\alpha) \neq 0. \tag{11}$$

Es bietet sich an, für die Messung $\alpha = \pi/4$ zu wählen, da dann der Messwert ε_2 von den beiden anderen jeweils die größte Unabhängigkeit besitzt, und die Formel (11) besonders einfach wird. Es ergibt sich dann

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Big(2\,\varepsilon_2 - \frac{\sigma_y + \sigma_x}{E}\,(1-\nu)\Big). \tag{12}$$

Hieraus lässt sich schon mit ε_2 und den bereits ermittelten Werten für σ_x und σ_y die Schubspannung τ_{xy} ausrechnen.

Es soll aber noch eine interessante Diskussion angeschlossen werden:

Es ist instruktiv in Gleichung (11) die Normalspannungen zu eliminieren. Aus den Gleichugen (3) und (4) erhält man für Summe und Differenz der Normalspannungen

$$\begin{aligned}\sigma_y + \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu)}\,(\varepsilon_y + \varepsilon_x)\\ \sigma_y - \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)}\,(\varepsilon_y - \varepsilon_x)\,.\end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (11) ergibt sich

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\,(1+\nu)}\,\frac{2\,\varepsilon_{\tilde{x}} - (\varepsilon_y + \varepsilon_x) + (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\,\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \quad \text{falls} \quad \sin(2\alpha) \neq 0\,.$$

Es lohnt der Vergleich mit dem Schubspannungsansatz

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}\,.$$

Dies liefert die Abhängigkeit der drei Stoffwerte untereinander

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

und die Beziehung

$$\gamma_{xy} = \frac{2\,\varepsilon_{\tilde{x}} - (\varepsilon_y + \varepsilon_x) + (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\,\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \quad \text{falls} \quad \sin(2\alpha) \neq 0\,,$$

die umgestellt Folgendes ergibt:

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_x}{2} - \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2}\,\cos(2\alpha) + \frac{1}{2}\,\gamma_{xy}\,\sin(2\alpha)$$

Es ist üblich darin $\frac{1}{2}\,\gamma_{xy}$ zu ersetzen durch

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\,\gamma_{xy}\,,$$

so dass die Beziehung schließlich

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_x}{2} - \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2}\,\cos(2\alpha) + \varepsilon_{xy}\,\sin(2\alpha)$$

lautet. Eine entsprechende Gleichung erhält man durch eine analoge Vorgehensweise für $\varepsilon_{\tilde{y}}$, nämlich

$$\varepsilon_{\tilde{y}} = \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2}\,\cos(2\alpha) - \varepsilon_{xy}\,\sin(2\alpha)$$

mit $\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\,\gamma_{yx}$.

Damit lässt sich genauso neben dem Spannungstensor ein Deformationstensor bilden. Für den Spannungstensor hatten wir

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

mit dem Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{x}} &= \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha) \\ \sigma_{\tilde{y}} &= \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos(2\alpha) - \tau_{xy} \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

Für die Dehnungen und Scherungen lautet der Deformationstensor

$$\vec{\vec{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

mit dem gleichen Transformationsverhalten

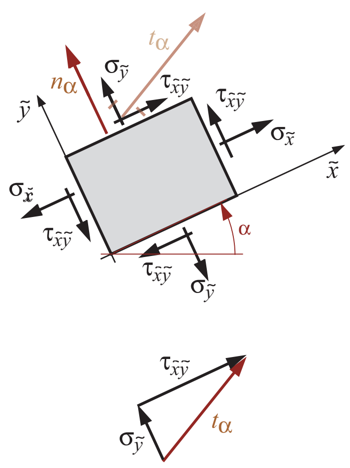
$$\begin{aligned} \varepsilon_{\tilde{x}} &= \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_x}{2} - \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2} \cos(2\alpha) + \varepsilon_{xy} \sin(2\alpha) \\ \varepsilon_{\tilde{y}} &= \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2} \cos(2\alpha) - \varepsilon_{xy} \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

Mit diesen Überlegungen lässt sich Gleichung (12) umschreiben in

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \left(2\,\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3\right), \tag{13}$$

die zur Auswertung der Messungen zur Verfügung steht und gültig ist, falls die drei Dehnmessstreifen untereinander jeweils einen Winkel von $\pi/4$ versetzt sind.

Alternative Herleitung der Beziehung (12):



Diese Lösungsmöglichkeit geht von folgender Darstellung des Spannungsvektors

$$\vec{t} = \vec{\vec{\sigma}}^{\,\mathrm{tr}} \cdot \vec{n} = \vec{n}^{\,\mathrm{tr}} \cdot \vec{\vec{\sigma}}$$

aus. Für den zweidimensionalen Fall wird

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ +\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Für die Normalspannung $\sigma_\alpha = \sigma_{\tilde{y}}$ gilt dann

$$\sigma_\alpha = n_\alpha^{\mathrm{tr}} \cdot \vec{\vec{\sigma}} \cdot n_\alpha = (-\sin\alpha, \cos\alpha) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \\ +\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Ausrechnung liefert

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \sin^2\alpha - 2\,\tau_{yx} \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha\,,$$

was mit der Formel (7) übereinstimmt, wenn trigonometrische Beziehung für den doppelten Winkel angesetzt werden.

Analog liefert

$$\sigma_{\alpha-\pi/2} = n_{\alpha-\pi/2} \cdot \vec{\vec{\sigma}} \cdot n_{\alpha-\pi/2}$$

die Beziehung

$$\sigma_{\alpha-\pi/2} = \sigma_x \cos^2\alpha - 2\,\tau_{yx} \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha$$

Aus dem Hookeschen Gesetz in Richtung 2 errechnet sich die Dehnung ε_2 zu

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\alpha-\pi/2} - \nu\,\sigma_\alpha\right)\,.$$

Nach Einsetzen der Normalspannungen erhält man für den Winkel $\alpha = \pi/4$ wieder für die Schubspannung Gleichung (13)

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\,(1=\nu)}\,(2\,\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

Lösung der Aufgabe 11 a)

a) Formeln und Zuordnung: $\varepsilon_x = \varepsilon_1\,,\ \varepsilon_y = \varepsilon_3\,,\ \varepsilon_{\tilde{x}} = \varepsilon_2$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x\right), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2\,(1+\nu)}\left(2\,\varepsilon_{\tilde{x}} - \varepsilon_y - \varepsilon_x\right)$$

Zahlenwerte:

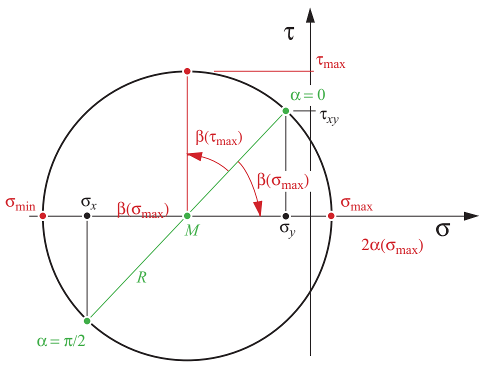
$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{2,1\cdot 10^5}{1-0,3^2}\Big(-1,8\cdot 10^{-3} + 0,3\,(-1,2\cdot 10^{-3})\Big)\,\overset{\wedge}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}} &&\approx -498,5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\\
\sigma_y &= \frac{2,1\cdot 10^5}{1-0,3^2}\Big(-1,2\cdot 10^{-3} + 0,3\,(-1,8\cdot 10^{-3})\Big)\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} &&\approx -401,5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\\
\tau_{xy} &= \frac{2,1\cdot 10^5}{1+0,3}\left(3,6 - \frac{-1,2-1,8}{2}\right)\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} &&\approx +823,8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}
\end{aligned}$$

Spannungstensor:

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -498,5 & +823,8 \\ +823,8 & -401,5 \end{pmatrix}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

b), c) Der Mohrsche Kreis lässt sich wegen ungünstiger Zahlenwerte schlecht quantitativ auswerten. Qualitativ mit $\sigma_x < \sigma_y < 0$ und $\tau_{xy} > 0$ sieht dieser aber so aus wie nebenstehend abgebildet.

Wir werten die Zusammenhänge für den Mohrschen Kreis rechnerisch aus.



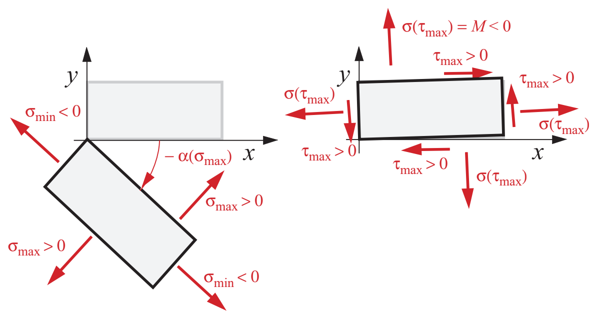
Für den Mittelpunkt und Radius des Kreises gilt:

$$M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \text{hier:}\ \ M = -450\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{hier:}\ \ R = 825\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Die maximale und minimale Normalspannungen sowie die maximale Schubspannung sind:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\max} &= M + R && \text{hier:}\ \ \sigma_{\max} = 375\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\\
\sigma_{\min} &= M - R && \text{hier:}\ \ \sigma_{\min} = -1275\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\\
\tau_{\max} &= R && \text{hier:}\ \ \sigma_{\max} = 825\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}
\end{aligned}$$



Bezüglich der Schubspannung bedeutet dies, dass die Richtungen 1 und 3 nahezu maximale Schubspannungen aufweisen.

Die zu $\sigma_{\max}$ und $\tau_{\max}$ gehörenden Richtungen sind

$$\beta(\sigma_{\max}) = -2\,\alpha(\sigma_{\max}) = \arctan\left(\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_y - \sigma_x)/2}\right) \quad \text{hier:}\ \ \beta(\sigma_{\max}) = 86,6\,^\circ \ \Rightarrow\ \alpha_{\sigma_{\max}} = -43,3\,^\circ$$

$$\beta(\tau_{\max}) = 2\,\alpha(\tau_{\max}) = \pi/2 - \beta(\sigma_{\max}) \quad \text{hier:}\ \ \beta(\tau_{\max}) = 3,4\,^\circ \ \Rightarrow\ \alpha_{\tau_{\max}} = 1,7\,^\circ$$

(In der grafischen Darstellung ist die Drehung des Elementes für die Schubspannung entgegen dem Uhrzeigersinn um $1,7\ ^\circ$ kaum zu erkennen.)