Lösung Aufgabe 10d

a) Kein Rutschen $\Rightarrow$ Haftreibung

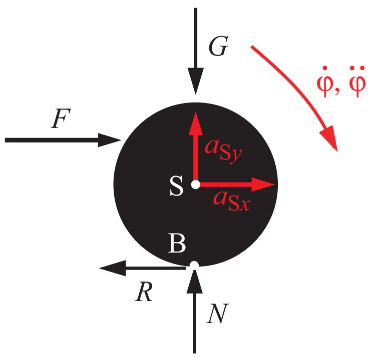
Lt. Coulombschen Ansatz für Haftreibung: $|\vec{R}| \leq \mu_H \, N \,, \; (N > 0)$

Daraus folgt der Zusammenhang:

$$\vec{R} = \vec{R}_{\text{max}} \qquad \Leftrightarrow \qquad |\vec{R}| = \mu_{H,\text{miun}} \, N$$

Lt. Freischnitt liefern die kinetischen Beziehungen:

				Unbek.	$\sum$
(1)	$m \, a_{S_x}$	$=$	$F - R$	a_{S_x}, R	2
(2)	$m \, a_{S_y}$	$=$	$N - m \, g$	a_{S_y}, N	4
(3)	$(J_K + m \, r^2) \, \ddot{\varphi}$	$=$	$F \, d$	$\ddot{\varphi}$	5



Mit Gleichungen (1) bis (3) sind alle linear unabhängigen kinetischen Beziehungen für das ebene Problem ausgereizt.

Die Kinematik liefert:

				Unbek.	$\sum$
(4)	a_{S_y}	$=$	0		5
(5)	a_{S_x}	$=$	$r \, \ddot{\varphi}$		5

Dies führt auf:

$$R = F \left(1 - \frac{m \, r \, d}{J_K + m \, r^2} \right)$$

Interessanterweise kann R das Vorzeichen wechseln und damit auch Null werden.

Der Vorzeichenwechsel erfordert wegen der Ungeichung $|\vec{R}| \leq \mu_H \, N$ eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $1 - \dfrac{m\,r\,d}{J_K + m\,r^2} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad R > 0$

Es ergibt sich für d dann

$$d < \left(\frac{J_K + m\,r^2}{m\,r^2}\right) r = d^*$$

Dies liefert für eine Vollkugel mit $J_K = \dfrac{2}{5}\,m\,r^2$: $d < d^* = \dfrac{7}{5}\,r$, was im sinnvollen Bereich $0 \leq d \leq 2r$ liegt.

Mit

$$|\vec{R}| = +R \stackrel{!}{=} R_{\max} = \mu_{H,\min_1} N = \mu_{H,\min_1} m\,g$$

ergibt sich ein erforderlicher Haftreibungskoeffizient von

$$\mu_H \geq \mu_{H,\min_1} = \frac{F}{m\,g}\left(1 - \frac{m\,r\,d}{J_K + m\,r^2}\right)$$

2. Fall: $1 - \dfrac{m\,r\,d}{J_K + m\,r^2} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad R < 0$

Es ergibt sich für d dann

$$d > \left(\frac{J_K + m\,r^2}{m\,r^2}\right) r = d^*$$

Dies liefert für die Vollkugel: $d^* = \dfrac{7}{5}\,r < d \leq 2r$.

Mit

$$|\vec{R}| = -R \stackrel{!}{=} R_{\max} = \mu_{H,\min_2} N = \mu_{H,\min_2} m\,g$$

ergibt sich ein erforderlicher Haftreibungskoeffizient von

$$\mu_H \geq \mu_{H,\min_2} = \frac{F}{m\,g}\left(\frac{m\,r\,d}{J_K + m\,r^2 - 1}\right)$$

b) Die notwendige Reibkraft für Rollen und damit auch $\mu_{H,\min_1}$ verschwinden, falls

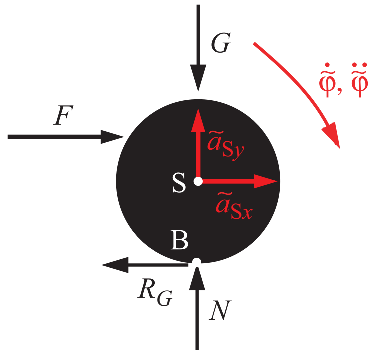
$$d = d^* = \frac{J_K + m\,r^2 - 1}{m\,r^2}\,r\,,$$

was für die Vollkugel den Wert $d^* = \dfrac{7}{5}\,r$ liefert.

c) Wenn die Kraft fortlaufend auf die Kugel einwirkt, rutscht die Kugel für $d > d^*$ und $\mu_H < \mu_{H,\min_2}$.

Im Freischnitt wird für Rutschen die Reibkraft R_G stets so angesetzt, dass $R_G > 0$ ist, also entgegengesetzt der yzu erwartenden Bewegungsrichtung. Es gilt dann lt. Coulombschen Ansatz für Gleitreibung:

$$|\vec{R}| = R = \mu_G\, N\,,\ (N > 0)$$



Damit ist für die Kugel

$$R_G = \mu_g\, m\, g$$

Außerdem gilt der Schwerpunktsatz

$$m\, \tilde{a}_{S_x} = F - R_G$$

Für die Beschleunigung folgt dann

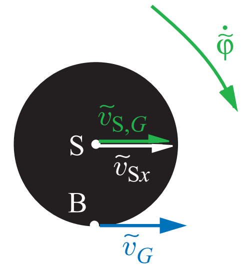
$$\tilde{a}_{S_x} = \frac{F}{m} - \mu_G\, g = const$$

Mit dem Drallsatz

$$J_K\, \ddot{\tilde{\varphi}} = R_G\, r = \mu_G\, m\, g\, r$$

folgt für die Winkelbeschleunigung

$$\ddot{\tilde{\varphi}} = \frac{m\, r^2}{J_K}\, \mu_G\, \frac{g}{r}$$



Da die Kugel aus der Ruhe konstant beschleunigt wird, gelten nach Integration die Beziehungen

$$\tilde{v}_{S_x} = \tilde{a}_{S_x}\, t \quad \text{und} \quad \dot{\tilde{\varphi}} = \ddot{\tilde{\varphi}}\, t$$

Mit Euler folgt weiterhin

$$\tilde{v}_{S_x} = \tilde{v}_G + \tilde{v}_{S,G} = \tilde{v}_G + r\, \dot{\tilde{\varphi}}\,.$$

Als Endergebnis erhält man

$$\tilde{v}_G = \left(\tilde{a}_{S_x} - \ddot{\tilde{\varphi}}\right)\, t = \left(\frac{F}{m} - \mu_g\, g\, \frac{J_K + m\, r^2}{J_K}\right)\, t \quad \text{mit} \quad \mu_G = \frac{\mu_H}{2}\,.$$