Aufgabe 1 F19 Teile A und B (9 + 20 Punkte)

A) In der Statistischen Mechanik wird das Großkanonische Potential einer Mischung von k-Komponenten

$$\Omega = U - T\,S - \sum_{i=1}^{k} \mu_i\, n_i \qquad (*)$$

oft zur Beschreibung irreversibler Prozesse offener Systeme verwendet.

a) Bestimmen Sie die natürlichen Variablen des Großkanonischen Potentials Ω!

b) Welche Bedeutung haben die partiellen Ableitungen von Ω nach den natürlichen Variablen?

B) Die Zustandsgleichung

$$p = \frac{R\,T}{v} - \frac{a}{v^2\,T^{1/2}} \quad \text{mit} \quad a = const \qquad (*)$$

liefert eine bereichsweise bessere Darstellung der Eigenschaften einer reinen Gaskomponente als das ideale Gasgesetz.

Beweisen Sie zunächst folgende drei Relationen

a) $$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v ,$$

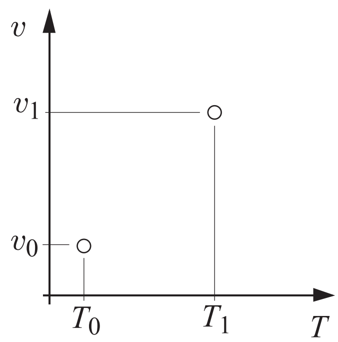
b) $$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \quad \text{und} \quad c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v !$$

Es sind nun mit diesen Relationen und der Zustandsgleichung $(*)$ konsistente Formulierungen gesucht für:

c) das vollständige Differential $\mathrm{d}u(T,v)$ der spezifischen Inneren Energie, wobei Sie den Zusammenhang

$$c_v = g(T) + \frac{3}{4}\frac{a}{vT^{3/2}}$$

benutzen sollen.



d) die kalorische Zustandsfunktion $u = u(T,v)$ der spezifischen Inneren Energie.
Hinweis für die Integration der differentiellen Zustandsgleichung $\mathrm{d}u$ aus c) kann wie folgt vorgegangen werden: Integrieren Sie das Vollständige Differential $\mathrm{d}u(T,v)$ auf einem geeigneten Integrationsweg vom Punkt T_0, v_0 bis T_1, v_1, wobei $u(T_0, v_0) = u_0$ sein soll. Tragen Sie den gewählten Integrationsweg in der vorgegebenen v, T-Ebene ein und begründen Sie, warum das so erhaltene Integral $u = u(T,v)$ ein allgemeingültiges Ergebnis darstellt!

e) das vollständige Differential $\mathrm{d}s(T,v)$ der spezifischen Entropie.

f) Weisen Sie nach, dass bei diesem Gasmodell die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen mit einer noch offenen Temperaturabhängigkeit $g(T)$ tatsächlich durch

$$c_v = g(T) + \frac{3}{4}\frac{a}{vT^{3/2}}$$

ausgedrückt werden kann!

g) Interpretieren Sie die Funktion $g(T)$, indem Sie mit dem Idealen Gas vergleichen!