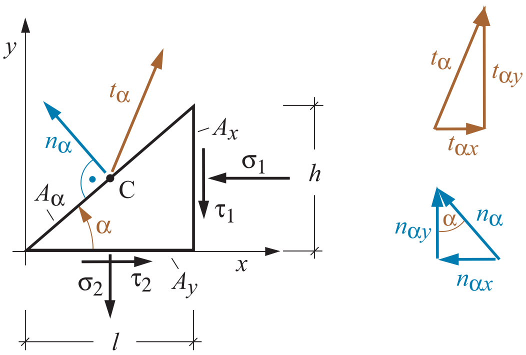
Statik

Lösung Aufgabe 10a)

a) Wir betrachten das Gleichgewicht an einem dreieckigen Freischnittelement mit Winkel α am Punkt C, an dem keine äußeren Kräfte und Momente auftreten sollen.[1)]



Eine Momentenbilanz um jeden beliebigen Punkt der Ebene liefert eine Aussage über die Schubspannungen. Günstigerweise wählt man den Punkt C in der Mitte der schrägen Schnittkante, da dann die Normalspannungen an den anderen Schnittkanten und die Spannungen in der Schnittfläche kein resultierendes Moment erzeugen:

$$\sum M_{(\mathrm{C})} = 0 : \qquad \tau_2 \, A_y \, \frac{h}{2} - \tau_1 \, A_x \, \frac{l}{2} = 0$$

Darin ist $A_y \propto l$ und $A_x \propto h$. Daher muss

$$\tau_1 = \tau_2$$

gelten, was in den Vorgaben der Aufgabenstellung schon berücksichtigt wurde. Wir müssen also im Folgenden nicht mehr unbedingt zwischen den Schubspannungen τ_1 und τ_2 unterscheiden und können

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau$$

setzen.

Es verbleibt noch das Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung zu untersuchen.

Alternative 1 Definition eines Spannungsvektors in der Schnittfläche unter dem Winkel α mit den kartesischen Komponenten $t_{\alpha x}$ und $t_{\alpha y}$, die wir zweckmäßigerweise positiv ansetzen, um eine einfach zu interpretierende Aussage über das Vorzeichen des Spannungsvektors $\vec{t}$ zu erhalten:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 : \qquad t_{\alpha x} \, A_\alpha + \tau_2 \, A_y - \sigma_1 \, A_x &= 0 \\ \sum F_y = 0 : \qquad t_{\alpha y} \, A_\alpha - \tau_1 \, A_x - \sigma_2 \, A_y &= 0 \end{aligned}$$

Mit $A_y = A_\alpha \cos\alpha$ und $A_x = A_\alpha \sin\alpha$ erhalten wir

$$\begin{aligned} t_{\alpha x} &= \sigma_1 \sin\alpha - \tau_2 \cos\alpha \\ t_{\alpha y} &= \sigma_2 \cos\alpha + \tau_1 \sin\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

Damit ist der durch den Belastungszustand mit σ_1, σ_2 und $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ hervorgerufenen Spannungsvektor $\vec{t_\alpha}$ in der Schnittfläche unter dem Winkel α berechnet:

$$\vec{t_\alpha} = \begin{pmatrix} t_{\alpha x} \\ t_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sin\alpha - \tau_2 \cos\alpha \\ \sigma_2 \cos\alpha + \tau_1 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Für die beiden Belastungsfälle mit $\sigma_1 = \sigma = 100 \ \mathrm{N/mm^2}, \tau = 1/2\,\sigma = 50 \ \mathrm{N/mm^2}$ und $\sigma_2 = \sigma = 100 \ \mathrm{N/mm^2}$ bzw. $\sigma_2 = \sigma/2 = 50 \ \mathrm{N/mm^2}$ ergeben sich

$$\vec{t_\alpha} = \begin{pmatrix} t_{\alpha x} \\ t_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \left(\sin\alpha - \frac{1}{2} \cos\alpha \right) \\ \sigma \left(\cos\alpha + \frac{1}{2} \sin\alpha \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{\alpha x} \\ t_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,7 \\ 111,6 \end{pmatrix} \ \mathrm{N/mm^2}$$

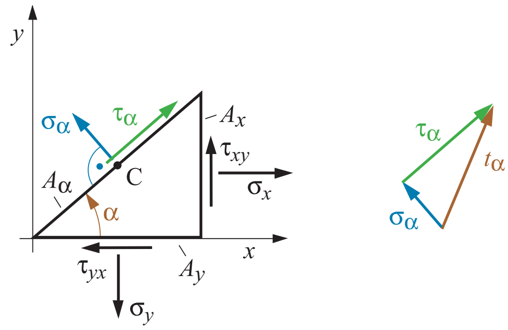
[1)] Im Abschnitt 2.1.5 der Vorlesungsmitschrift zu Mechanik I wird der Fall vorgestellt, dass zusätzliche äußere Kräfte an einem differentiellen Element des Körpers auftreten.

bzw.

$$\vec{t}_\alpha = \begin{pmatrix} t_{\alpha x} \\ t_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right) \\ \frac{\sigma}{2}\,(\cos\alpha + \sin\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,7 \\ 68,3 \end{pmatrix} \ \mathrm{N/mm^2}$$

Alternative 2

In der nebenstehenden Abbildung wird eine alternative Aufteilung des Spannungsvektors $\vec{t}_\alpha$ in eine Komponente σ_α normal und eine Komponente τ_α tangential zur Schnittfläche eingeführt. Es soll nun die in der Vorlesung genutzte Vorzeichenkonvention[2] für die Spannungen genutzt werden. Diese Konvention ist in der nebenstehenden Abbildung gezeigt. Im Anhang wird gezeigt, dass diese Konvention in der Tensordarstellung des Spannungsvektors zu einer vorzeichenfreien Beziehung führt.



Spannungen senkrecht zur Fläche werden als Normalspannungen bezeichnet. Diese Normalspannungen werden grundsätzlich als Zugspannungen definiert. Tangentiale Spannungen in den Flächen werden als Schubspannungen bezeichnet und sind so angeordnet, dass an den Schnittflächen mit jeweils größerem x oder y die Schubspannung in die positve Koordinatenrichtung zeigt. Demnach gilt

$$\sigma_x = -\sigma_1\,, \quad \sigma_y = \sigma_2\,, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\tau$$

Wird wieder das Kräftegleichgewicht angesetzt, erhält man

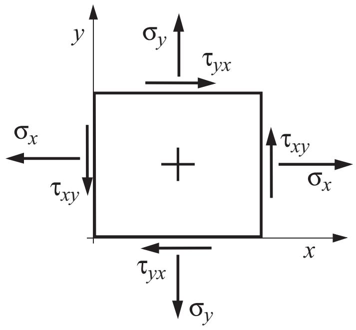
$$\begin{aligned} \textstyle\sum F_x = 0: \qquad \sigma_x\,A_\alpha\,\sin\alpha - \tau_{yx}\,A_\alpha\,\cos\alpha + \tau_\alpha\,A_\alpha\,\cos\alpha - \sigma_\alpha\,A_\alpha\,\sin\alpha &= 0 \\ \textstyle\sum F_y = 0: \quad -\sigma_y\,A_\alpha\,\cos\alpha + \tau_{xy}\,A_\alpha\,\sin\alpha + \tau_\alpha\,A_\alpha\,\sin\alpha + \sigma_\alpha\,A_\alpha\,\cos\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen für σ_α und τ_α lassen sich auflösen zu

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha\,\sin\alpha - \sigma_x\,\sin^2\alpha - \sigma_y\,\cos^2\alpha + 2\,\tau_{xy}\,\sin\alpha\,\cos\alpha &= 0 \\ \tau_\alpha + (\sigma_x - \sigma_y)\,\sin\alpha\,\cos\alpha + \tau_{xy}\,(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Mit diesen Formeln lassen sich Zahlenwerte für σ_α und τ_α angeben. Darauf wird hier verzichtet, da bereits eine quantitative Lösung in Alternative 1 existiert. Überdies ist dieser Ansatz prädestiniert für eine grafische Lösung, die auf dem Mohrschen Kreis fußt. Dessen Herleitung findet sich am Ende des Anhangs zu dieser Aufgabe.[3] Der Mohrsche Kreis soll dann auch bei der Lösung der weiteren Unterpunkte der Aufgabenstellung genutzt werden.

b) Die Vorzeichenkonvention der nebenstehenden Abbildung, die mit derjenigen von Alternative 2 übereinstimmt, ist Grundlage zur Angabe der Komponenten des Spannungstensors. Dessen Definition lautet:



$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

Vergleich mit den Angaben der Aufgabenstellung liefert:

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & -\tau \\ -\tau & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

[2] Siehe dazu auch die Ausführungen im Anhang zur dieser Aufgabe.

[3] Die detaillierte Ableitung der Mohrschen Kreisgleichung aus den Gleichgewichtsbedingungne findet sich in der Vorlesung im Abschnitt 2.1.2.

Die Zahlenwerte für die beiden Belastungsfälle sind:

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} -100 & -50 \\ -50 & 100 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} -100 & -50 \\ -50 & 50 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

c),d) Die Frage kann dadurch beantwortet werden, dass der Spannnungstensor auf ein solches neues ξ, η-Koordinatensystem transformiert wird, dass der transformierte Spannungtensor nur Diagonalelemente besitzt. In der linearen Algebra wird diese Transformation als Hauptachsentransformation bezeichnet:

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad \overset{\text{Hauptachsentransforation}}{\Rightarrow} \quad \vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^\circ & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^\circ \end{pmatrix}$$

Die Diagonalelemente σ_ξ° und σ_η° werden als die Eigenwerte des Tensors bezeichnet, hier als Hauptspannungen. Die zugehörigen Koordinatenrichtungen ξ und η als Hauptachsen. Die Hauptachsen sind die Richtungen der Eigenvektoren des Tensors.[4)]

Wir wollen hier nicht diesen Weg beschreiten, um die Hauptsannungen und dei Hauptspannungsrichtungen zu ermitteln. Unter allen möglichen Tensoren tauchen in der Mechanik nur solche auf, die auch dem Momenten- und Kräftegleichgewicht Genüge leisten. Das Momentengleichgewicht bedingt die Symmetrie des Spannungstensors $\tau_{xy} = T_{yx}$ und stellt sicher, dass die Haupotspannungen reele Größen sind. Das Kräftegleichgewicht fordert einen Zusammenhang zwischen den Spannungen σ_α und τ_α als Funktion der Belastung σ_x, σ_y und τ_{xy} und des Winkels α nach Gl. (2). Dieser Zusammenhang liefert im τ, σ-Raum eine Ortskurve, die einem einfachen Kreis entspricht, dem Mohrschen Spannungskreis. Mit diesem ist eine schnelle auch quantitativ befriedigende grafische Lösung möglich, die hier durchgeführt werden soll.

[4)] Die Transformation eines beliebigen Tensors führt im Allgemeinen auf komplexe Eigenwerte. Nach einem Satz der linearen Algebra besitzen symmetrische Tensoren jedoch stets nur reelle Eigenwerte. Da wir für die Mechanik das Momentengleichgewicht fordern müssen, war die Gleichheit der Schubspannungen zwingend. Die symmetrischen Spannungstensoren haben dann auch, wie es sein muss, niemals komplexe Hauptspannungen, was unphysikalisch wäre.

Mit dem Spannungstensor können für die beiden Belastungsfälle die Mohrschen Kreise gezeichnet werden und damit die Hauptspannungen und die maximale Schubspannung ermittelt werden. Für den Mittelpunkt M und Radius R des Kreises gilt allgemein:

$$M = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}\,, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hier ergibt sich:

$$M = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\,, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Dabei gilt folgende Zuordnung der Punkte auf dem Kreis zum Schnittwinkel α:

$$P(\alpha = 0) = (\sigma_y, \tau_{xy})\,, \quad P(\alpha = 90°) = (\sigma_x, -\tau_{xy})$$

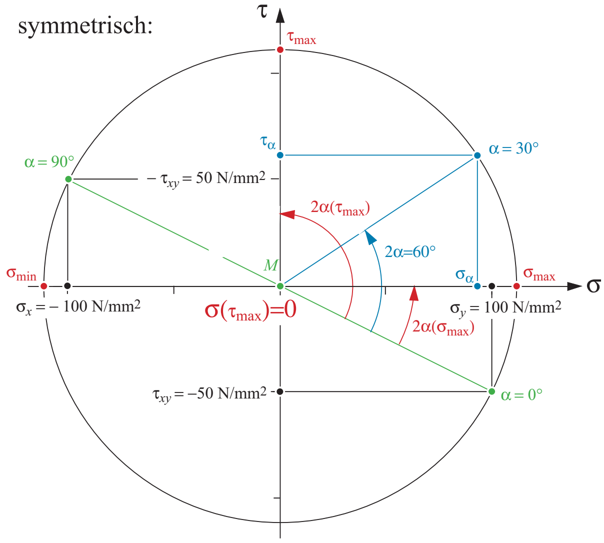
Hier ergibt sich also:

$$P(\alpha = 0) = (\sigma_2, -\tau_2)\,, \quad P(\alpha = 90°) = (-\sigma_1, \tau_1)$$

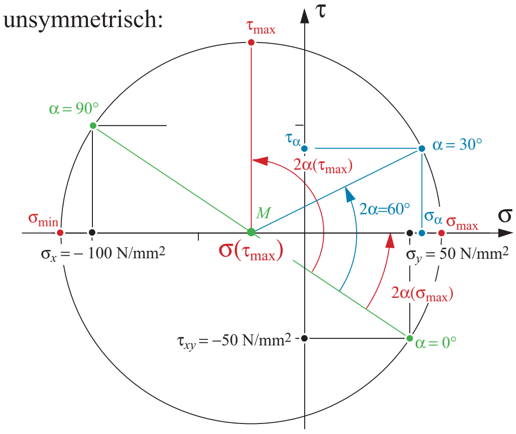
Für $\alpha = 30°$ ergeben sich im symmetrischen ($\sigma_2 = \sigma_1$) bzw. im unsymmetrischen ($\sigma_2 = 1/2\,\sigma_1$) zur τ-Achse angeordneten Kreis die in der Tabelle abgelesenen Zahlenwerte.

	symm.	unsymm.
σ_α [N/mm^2]	93	56,2
τ_α [N/mm^2]	62,8	40,5

symmetrisch:



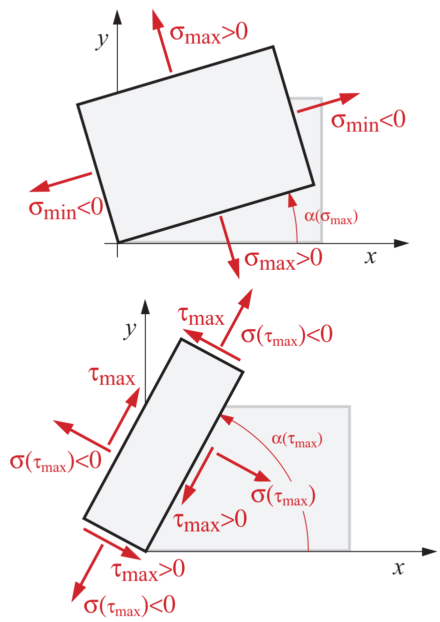
unsymmetrisch:



Betrag und Richtungssinn der daraus resultierenden Spannungen $\vec{t}_\alpha$ stimmen gut mit den unter a) errechneten Werten überein. Ferner erhält man für die Hauptspannungen und die maximalen Schubspannungen sowie die dazugehörigen Winkel folgende Zahlenwerte:

	Einheit	symm.	unsymm.
σ_α	[N/mm^2]	93	56,2
τ_α	[N/mm^2]	62,8	40,5
$\sigma_{\max}$	[N/mm^2]	112	91,5
$\alpha(\sigma_{\max})$	[°]	13	16,5
$\sigma_{\min}$	[N/mm^2]	−112	−116
$\alpha(\sigma_{\min})$	[°]	103	106,5
$\tau_{\max}$	[N/mm^2]	112	90,1
$\alpha(\tau_{\max})$	[°]	58	61,5
$\sigma(\tau_{\max})$	[N/mm^2]	0	−26

Lage der Schnittebenen für Hauptscannungen und max. Schubspannungen im unsymmetrischen Fall:



Die zu den Hauptspannungen und den maximalen Schubspannungen gehörenden Richtungen im physikalischen Raum zeigt die letzte Abbildung für den Fall des unsymmetrischen Mohrschen Kreises. An den Schnittflächen mit Hauptspannungen sind niemals Schubspannungen anzutreffen.

Nur im Falle zur τ-Achse symmetrischer Mohrscher Kreise ergibt sich für die Normalspannung des unter $\alpha = \alpha(\tau_{\max})$ gedrehten Elementes eine verschwindende Normalspannung. Dies ist der Sonderfall des reinen Schubs. Dieser tritt immer auf, wenn die Normalspannungen in x-und y-Richtung den gleichen Betrag haben, aber einmal als Zug- und an der korrespondierenden Seite als Druckspannng auftreten.

Anhang 1: Diskussion und Motivation des Spannungstensors $\vec{\vec{\sigma}}$:

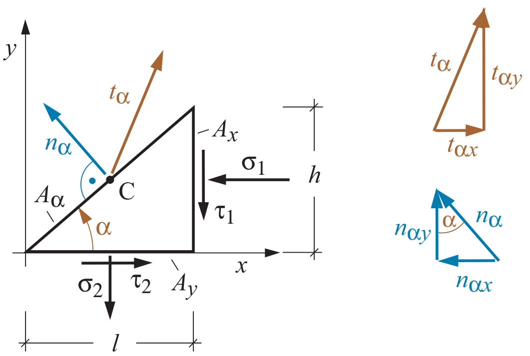
Aus den Unterpunkt a) unter Alternative 1 abgeleiteten Formeln für den Spannungsvektor $\vec{t}_\alpha$

$$\begin{aligned} t_{\alpha x} &= \sigma_1 \sin\alpha - \tau_2 \cos\alpha \\ t_{\alpha y} &= \sigma_2 \cos\alpha + \tau_1 \sin\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

lässt sich die Einführung des Spannungstensors motivieren und seine Bedeutung sowie die für ihn getroffene Vorzeichendefinition erläutern.

Die Komponenten des Spannungsvektors in Gl. (1) enthalten die Information des Belastungszustandes repräsentiert durch σ_1, σ_2 und τ sowie eine Information über die Schnittrichtung α in Form von $\sin\alpha$- und $\cos\alpha$-Faktoren. Obwohl beide Informationen sich grundlegend unterscheiden, vermischen sie sich unübersichtlich in den Formeln.

Mit dem Normalenvektor $\vec{n}_\alpha$, der die Orientierung der Schnittfläche darstellt, gelingt eine Trennung der Belastungs- und Schnittrichtungsinformation in der Darstellung von $\vec{t}_\alpha$.



Der Normalenvektor an die Schnittfläche lautet in Komponenten:

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} n_{\alpha x} \\ n_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Zur Darstellung von $\vec{t}_\alpha$ probieren wir folgendes Skalarprodukt:

$$\vec{t}_\alpha = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_\alpha \tag{2}$$

Ausrechnen des Skalarproduktes und der Vergleich mit Gl. (1) liefert:

$$\vec{t}_\alpha = \begin{pmatrix} -T_{11}\sin\alpha + T_{12}\cos\alpha \\ -T_{21}\sin\alpha + T_{22}\cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$T_{11} = -\sigma_1\,, \quad T_{12} = -\tau_2 = -\tau\,, \quad T_{21} = -\tau_1 = -\tau\,, \quad T_{22} = \sigma_2$$

bzw.

$$\vec{t}_\alpha = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & -\tau_2 \\ -\tau_1 & \sigma_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_\alpha$$

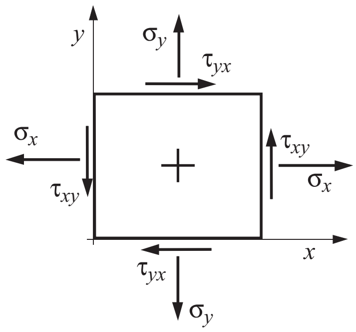
Der Belastungszustand ist also durch die Zahlen des Tensors

$$\vec{\vec{T}} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & -\tau_2 \\ -\tau_1 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

bestimm, wogegen die Richtungsinformation davon unabhängig alleine iin der Angabe des Normalenvektors enthalten ist:

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Damit haben wir eine erfolgreiche Trennunng der beiden Einflüsse erzielt. Einzig störend sind die auftretenden negativen Vorzeichen.



Man erkennt aber unmittelbar Folgendes: Bei den Normalspannung liefert die Zugspannung σ_2 einen positiven Eintrag im Tensor, die Druckspannung einen negativen. Ebenso treten die Schubspannungen negativ auf. Dies legt es nahe, die in der nebenstehenden Abbildung gezeigte Vorzeichenkonvention am rechteckigen Schnittelement vorzunehmen, wie sie auch in Alternative 2 bei der Ableitung des Mohrschen Spannungskreises vorgenommen wurde. Dann ergibt sich

$$\vec{\vec{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} .$$

Der so definierte Tensor wird Spannungstensor $\vec{\vec{\sigma}}$ genannt. Man definiert:

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

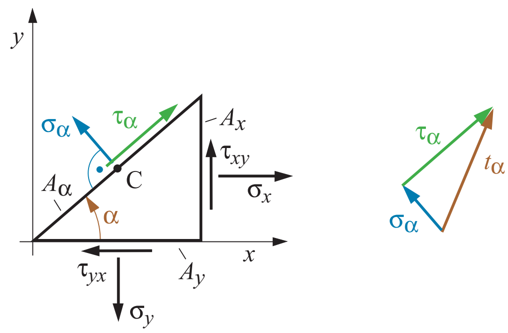
Da $\tau_1 = \tau_2$ ist gilt auch $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Der Spannungstensor ist folglich symmetrisch. Damit ist der Spannungstensor $\vec{\vec{\sigma}}$ mit dem transformierten $\vec{\vec{T}}$-Tensor identisch: $\vec{\vec{\sigma}} = \vec{\vec{T}}^{\,\mathrm{tr}}$ Wir erhalten also für den Spannungsvektor die Darstellung:

$$\vec{t}_\alpha = \sigma^{\mathrm{tr}} \cdot \vec{n}_\alpha$$

Mit der Einführung des Spannungstensors zur Beschreibung des Belastungszustandes gelingt eine Trennung von Schnittrichtung und Belastung in der vorstehenden Formel. Mit der Vorzeichenkonvention in der letzten Abbildung sind alle Einträge σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx} im Spannungstensor für beliebigen Spannungszustand positiv. Übertragen auf die Aufgabenstellung bedeutet dies:

$$\sigma_x = -\sigma_1\,, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\sigma_1}{2}$$

Anhang 2: Ableitung des Mohrschen Kreises



Mit der in der nebenstehenden Abbildung eingeführten alternativen Aufteilung des Spannungsvektors $\vec{t}_\alpha$ in die Komponenten σ_α und τ_α gelingt ebenfalls eine übersichtliche Darstellung des Zusammenhangs von Belastungszustand und Schnittrichtung. Wird wieder das Kräftegleichgewicht angesetzt, wobei die in der Vorlesung eingeführte Vorzeichenkonvention[5)]für die Spannungen genutzt wurde mit

[5)]Siehe dazu auch die Ausführungen im Anhang zur dieser Aufgabe.

$$\sigma_x = -\sigma_1 \quad \sigma_2 = \sigma_y \, , \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\tau \, ,$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum F_x = 0 \qquad & \sigma_x \, A_\alpha \, \sin\alpha - \tau_{yx} \, A_\alpha \, \cos\alpha + \tau_\alpha \, A_\alpha \, \cos\alpha - \sigma_\alpha \, A_\alpha \, \sin\alpha = 0 \\
\textstyle\sum F_y = 0 \quad & -\sigma_y \, A_\alpha \, \cos\alpha + \tau_{xy} \, A_\alpha \, \sin\alpha + \tau_\alpha \, A_\alpha \, \sin\alpha + \sigma_\alpha \, A_\alpha \, \cos\alpha = 0
\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen für σ_α und τ_α lassen sich auflösen zu

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha \, \sin\alpha - \sigma_x \, \sin^2\alpha - \sigma_y \, \cos^2\alpha + 2\,\tau_{xy} \, \sin\alpha \, \cos\alpha &= 0 \\
\tau_\alpha + (\sigma_x - \sigma_y) \, \sin\alpha \, \cos\alpha + \tau_{xy} \, (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) &= 0 \, .
\end{aligned}$$

Der Schnittrichtung α tritt als Parameter auf, der sich aus den beiden Gleichungen elimieren lässt. Zunächst wird mit den trigonometrischen Formeln

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(2\alpha)\Big) \, , \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos(2\alpha)\Big) \, , \quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\,\sin(2\alpha)$$

der doppelte Winkel 2α eingeführt:

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha - \frac{1}{2}\,(\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{1}{2}\,(\sigma_y - \sigma_x)\,\cos(2\alpha) - \tau_{xy}\,\sin(2\alpha) \\
\tau_\alpha &= \frac{1}{2}\,(\sigma_y - \sigma_x)\,\sin(2\alpha) + \tau_{xy}\,\cos(2\alpha)
\end{aligned}$$

Die Elimination von 2α führt auf die Kreisgleichung

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2.$$

Dies legt eine grafische Darstellung in der σ, τ-Phasenebene nahe, in der der Zusammenhang von σ_α und τ_α mit der Schnittrichtung für Gleichgewicht auf einer ortskurve liegt, die eine Kreis darstellt: den sogenannten Mohrschen Spannungskreis.