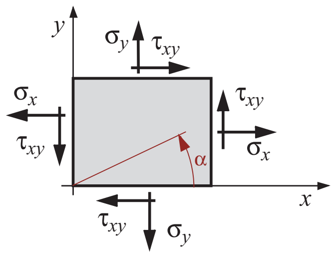
Festigkeitslehre

Lösung zu Aufgabe 11 a)

a) Hookesches Gesetz für den zweidimensionalen Spannungszustand:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\Big(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\Big) \tag{1}$$

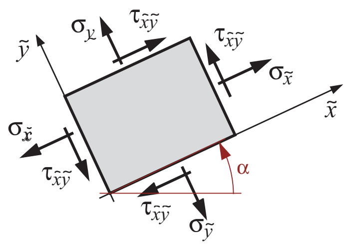
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\Big(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\Big) \tag{2}$$



Die beiden Messwerte $\varepsilon_x = \varepsilon_1$ und $\varepsilon_y = \varepsilon_3$ liefern nach Umstellung die Spannungen

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\Big(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\Big) = \frac{E}{1-\nu^2}\Big(\varepsilon_1 + \nu\,\varepsilon_3\Big) \tag{3}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\Big(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x\Big) = \frac{E}{1-\nu^2}\Big(\varepsilon_3 + \nu\,\varepsilon_1\Big) \tag{4}$$

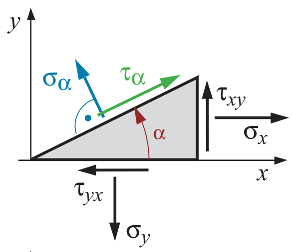


Dies erlaubt uns unmittelbar, die Spannungen σ_x und σ_y aus den Messwerten ε_1 und ε_1 zu bestimmen.

Zahlenwerte:

$$\sigma_x = \frac{2,1\cdot 10^5}{1-0,3^2}\Big(-1,8 - 0,3\cdot 1,2\Big)\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \approx -498,5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

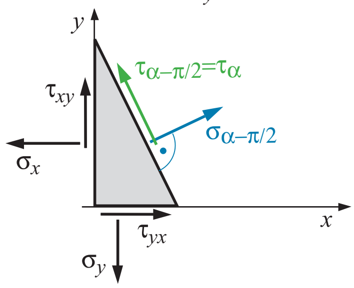
$$\sigma_y = \frac{2,1\cdot 10^5}{1-0,3^2}\Big(-1,2 - 0,3\cdot 1,8\Big)\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \approx -401,5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$



Die Messung der Dehnung unter einer Richtung im Winkel α liefert analog zu den Gleichungen (1) und (2) im gedrehten Koordinatensystem:

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = \frac{1}{E}\Big(\sigma_{\tilde{x}} - \nu\,\sigma_{\tilde{y}}\Big) \tag{5}$$

$$\varepsilon_{\tilde{y}} = \frac{1}{E}\Big(\sigma_{\tilde{y}} - \nu\,\sigma_{\tilde{x}}\Big) \tag{6}$$



Aus dem Gleichgewicht am dreieckigen Element gilt für die Normalspannungen:

$$\sigma_{\tilde{y}} = \sigma_\alpha = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\cos(2\alpha) - \tau_{xy}\sin(2\alpha) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\alpha-\pi/2} &= \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\cos(2(\alpha-\pi/2)) - \tau_{xy}\sin(2(\alpha-\pi/2)) \\ &= \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\cos(2\alpha) + \tau_{xy}\sin(2\alpha) \qquad (8)\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung (5) liefert dies mit $\alpha = \pi/4$

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = \frac{1}{E}\Big(\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}(1-\nu) + \tau_{xy}(1+\nu)\Big)$$

und nach τ_{xy} umgestellt:[1)]

$$\tau_{xy} = \frac{2\,E\,\varepsilon_{\tilde{x}} - (\sigma_y + \sigma_x)\,(1 - \nu)}{2\,(1+\nu))}. \tag{9}$$

Zahlenwert:

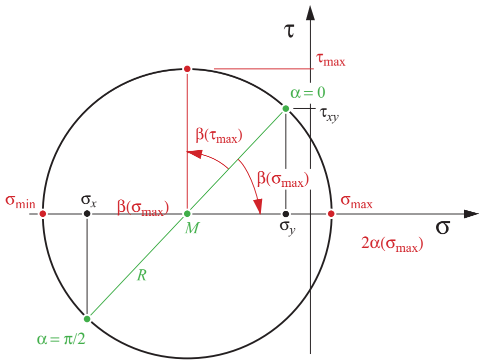
$$\tau_{xy} \;=\; \frac{2,1 \cdot 10^5}{1+0,3}\left(3,6 - \frac{-1,2-1,8}{2}\right) \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \;\approx\; 823,8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Der Spannugstensors lautet damit:

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -498,5 & +823,8 \\ +823,8 & -401,5 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

b), c) Der Mohrsche Kreis lässt sich wegen ungünstiger Zahlenwerte schlecht quantitativ auswerten. Qualitativ mit $\sigma_x < \sigma_y < 0$ und $\tau_{xy} > 0$ sieht dieser aber so aus wie nebenstehend abgebildet.

Wir werten die Zusammenhänge für den Mohrschen Kreis rechnerisch aus.



Für den Mittelpunkt und Radius des Kreises gilt:

$$M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \text{hier: } M = -450\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

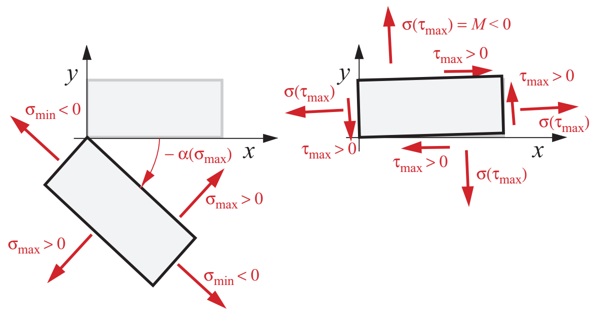
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{hier: } R = 825\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Die maximale und minimale Normalspannungen sowie die maximale Schubspannung sind:

$$\sigma_{\max} = M + R \qquad \text{hier: } \sigma_{\max} = 375\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\sigma_{\min} = M - R \qquad \text{hier: } \sigma_{\min} = -1275\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\tau_{\max} = R \qquad \text{hier: } \sigma_{\max} = 825\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$



Bezüglich der Schubspannung bedeutet dies, dass die Richtungen 1 und 3 nahezu maximale Schubspannungen aufweisen.

Die zu $\sigma_{\max}$ und $\tau_{\max}$ gehörenden Richtungen sind

$$\beta(\sigma_{\max}) \;=\; -2\,\alpha(\sigma_{\max}) \;=\; \arctan\left(\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_y - \sigma_x)/2}\right) \quad \text{hier: } \beta(\sigma_{\max}) = 86,6\,^\circ \;\Rightarrow\; \alpha_{\sigma_{\max}} = -43,3\,^\circ$$

$$\beta(\tau_{\max}) \;=\; 2\,\alpha(\tau_{\max}) \;=\; \pi/2 - \beta(\sigma_{\max}) \quad \text{hier: } \beta(\tau_{\max}) = 3,4\,^\circ \;\Rightarrow\; \alpha_{\tau_{\max}} = 1,7\,^\circ$$

(In der grafischen Darstellung ist die Drehung des Elementes für die Schubspannung entgegen dem Uhrzeigersinn um $1,7\,^\circ$ kaum zu erkennen.)

[1)] Mit Gleichungen (3) und (4) ergibt sich auch

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\,(1+\nu)}\,(2\,\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3).$$