

### 1.3 Kinetik des Massenpunktes - die Lagrangeschen Gleichungen

Wir wollen jetzt der bereits weiter oben im Unterabschnitt 1.2.6.2.6 auf S. 59 im Zusammenhang mit Zwangskräften gemachten Bemerkung widmen und eine alternative Darstellung der Mechanik präsentieren, die die Einschränkung auf Bahnkurven direkt mit einbezieht und deshalb zunächst eine Lösung der Bewegungsgleichungen erlaubt, ohne die oft schwierig zu ermittelnden Zwangskräfte berechnen zu müssen.

Wir wollen das Problem auch gleich für ein System mit  $n$  Massenpunkten formulieren.<sup>38)</sup> Um die Position aller  $n$  Massenpunkte im dreidimensionalen Raum zu beschreiben, werden genau  $3n$  Koordinaten gebraucht. Die freie Bewegung aller Massenpunkte vollzieht sich also auf einer Bahnkurve im  $\mathbb{R}^{3n}$ .<sup>39)</sup> Eine auf bestimmte Bahnkurven durch  $k$  Zwangsbedingungen eingeschränkte Bewegung wird demnach auf einer eingeschränkten Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{3n}$  nämlich dem  $\mathbb{R}^{3n-k}$ -Untermannigfaltigkeit mit  $f = 3n - k$  Freiheitsgraden ablaufen. Wir wollen einen Ortsvektor  $\vec{r}$  für das komplette System von  $n$  Massenpunkten definieren, der zu jedem Zeitpunkt  $t$  aus den jeweiligen Ortsvektoren  $\vec{r}_i(t)$  der einzelnen Massenpunkte mit  $i = 1, \dots, n$  in folgender Form

$$(1.3.1) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \vec{r}_1(t) \\ \vec{r}_2(t) \\ \vdots \\ \vec{r}_n(t) \end{pmatrix}$$

zusammen gesetzt ist. Die Zwangsbedingungen, die die Massenpunkte dann auf eine  $f$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit einschränken, können durch eine Anzahl von  $k = 3n - f$  Bedingungen ausgedrückt werden.

#### Beispiel

Ein einzelner Massenpunkt  $n = 1$ , der sich im  $\mathbb{R}^3$  frei bewegen kann, besitzt  $3n = 3$  Freiheitsgrade. Denn es sind drei Koordinaten - bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems des Tripels  $x$ ,  $y$  und  $z$  - anzugeben, um seine momentane Position anzugeben. Soll die Bewegung des Massenpunktes auf eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  eingeschränkt werden -die zeitabhängig sein darf-, so kann diese Fläche durch die Angabe einer einzigen Bedingung  $k = 1$  nämlich

$$(B1.3.1) \quad z = g(x, y) \quad \text{oder} \quad z - g(x, y, t) = f_1(\vec{r}, t) = 0$$

eindeutig beschrieben werden. Es reicht also die Angabe der Werte  $x$  und  $y$  um die dritte Koordinate  $z = g(x, y)$  festzulegen. Der Massenpunkt besitzt demnach eine Gesamtzahl von  $f = 3n - k = 2$  Freiheitsgraden.

Verallgemeinert man das vorstehende Beispiel auf  $n$  Massenpunkte, die statt im  $\mathbb{R}^{3n}$  auf den  $\mathbb{R}^f$  eingeschränkt werden, so sind dazu

$$(1.3.2) \quad f_j(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{mit} \quad j = 1, \dots, k = 3n - f$$

<sup>38)</sup>Damit ist auch klar, dass die hier vorgestellten Zusammenhänge auch für ausgedehnte Körper, insbesondere starre Körper gelten.

<sup>39)</sup>Der Ausdruck Bahnkurve ist hier verallgemeinert gemeint und wird im  $\mathbb{R}^{3n}$ , dem physikalischen Raum, im Allgemeinen nicht nur eine eindimensionale Kurve sondern durchaus auch eine zweidimensionale Fläche darstellen.

Nebenbedingungen erforderlich. Die so bestimmte Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\mathbb{R}^f$  im  $\mathbb{R}^{3n}$  soll nun durch ein System von  $f$  **generalisierten Koordinaten**  $q_i(t)$  mit  $i = 1, \dots, f$  parametrisiert werden, wobei wir zugelassen haben, dass die Zwangsbedingung und damit die darauf angepassten Koordinaten zeitabhängig sind. Die Koordinatenvektoren  $\vec{r}$  der so eingeschränkten Bewegung lassen sich dann durch

$$(1.3.3) \quad \vec{r}(\vec{q}(t), t)$$

eindeutig angegeben werden, wobei mit dem Vektor

$$(1.3.4) \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_f(t) \end{pmatrix}$$

dem Freiheitsgrad jedes der  $n$  Massenpunkte im Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^f$  Rechnung getragen wird.

Würden wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen für ein Problem mit  $n$  Massenpunkten ansetzen, hätten wir zunächst für jeden der  $3n$  Freiheitsgrade eine Gleichung zu formulieren. Aus diesem System müssten wir sodann  $k = 3n - f$  Koordinaten explizit eliminieren, um die Bewegung endgültig in den  $f$  Freiheitsgraden beschreiben zu können.

Unser jetziges Ziel ist es dagegen, die Bewegungsgleichungen direkt in den  $f$  generalisierten Koordinaten zu formulieren, welche die Einschränkung auf die Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^{3n-k}$  mit  $f = 3n - k$  Freiheitsgraden berücksichtigen. Um dies zu erreichen, greifen wir das **Prinzip der Virtuellen Verrückung** auf, welches wir bereits in der Statik eingeführt haben. Die virtuelle Verrückung eines Massenpunktes  $i$  sei  $\delta\vec{r}_i$ , der Vektor aller möglichen virtuellen Verrückungen des Systems von Massenpunkten durch

$$(1.3.5) \quad \delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta\vec{r}_1 \\ \delta\vec{r}_2 \\ \vdots \\ \delta\vec{r}_n \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Der Begriff der Virtuellen Verrückung beinhaltet die Einschränkung, dass nur Verrückungen erlaubt sind, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind. Mit anderen Worten sollen alle  $\delta\vec{r}_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  mit der Bewegung innerhalb des durch die Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{3n}$  aufgespannten  $\mathbb{R}^{3n-k}$ -Unterraums verträglich sein. Dies bedeutet, dass sie stets im Tangentialraum zu unserem  $\mathbb{R}^{3n-k}$ -Unterraum liegen.

Ausgehend von der Newtonschen Bewegungsgleichung mit den Zwangskräften, können wir das Gleichungssystem

$$(1.3.6) \quad \begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \vec{F}_i + \vec{F}_{Z,i} \\ \sum_{i=1}^n \vec{F}_{Z,i} \cdot \delta\vec{r}_i &= 0 \end{aligned}$$

formulieren. In der ersten Gleichung bedeuten  $\vec{F}_i$  die resultierende Kraft (ohne Zwangskräfte) und  $\vec{F}_{Z,i}$  die resultierende Zwangskraft auf den  $i$ -ten Massenpunkt. In der zweiten Gleichung

wird die Tatsache zum Ausdruck gebracht, dass die Zwangskräfte notwendig senkrecht auf der die Bewegung begrenzenden Untermannigfaltigkeit stehen.

Im nächsten Schritt multiplizieren wir die Newtonsche Gleichung mit der virtuellen Verrückung  $\delta\vec{r}_i$ . Dies liefert

$$(1.3.7) \quad \sum_{i=1}^n \left( m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Für ein System im Gleichgewicht,  $\ddot{\vec{r}}_i = \vec{0}$  für  $i = 1, \dots, n$ , sagt diese Beziehung aus, dass die resultierende Kraft auf jeden der Massenpunkte genau senkrecht zur Untermannigfaltigkeit steht. Dies ist einleuchtend, da im anderen Fall, die Teilchen durch die tangentialen Komponenten der Kräfte in Bewegung kommen würden. Mit Gleichung (1.3.6) wird diese Aussage auf den allgemeinen Fall eines beschleunigten Systems verallgemeinert. Die Summe aus externen Kräften und den Scheinkräften  $-m_i \ddot{\vec{r}}_i$  addieren sich stets zu einem Vektor, der senkrecht auf die Untermannigfaltigkeit der zugelassenen Bewegungen steht, wenn die Newtonsche Bewegungsgleichung gültig sein soll.

Wir haben mit Gl. (1.3.10) eine Basis gefunden, eine alternative Formulierung der Bewegungsgleichungen, nämlich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, zu finden. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen wollen wir in den nächsten Abschnitten auf zwei verschiedene Weisen herleiten.

### 1.3.1 Herleitung der Lagrangeschen Gleichungen mit dem Prinzip von d'Alembert

Wir wollen als erstes die generalisierten Koordinaten  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}, t)$  nach Gl. (1.3.4) wieder aufgreifen und diese in der Newtonschen Gleichung (1.3.7) verwenden. Die Forderung, dass die virtuellen Verrückungen im Tangentialraum an unseren  $\mathbb{R}^{3n-k}$ -Unterraum liegen, bedeutet, dass sie eine Linearkombination der partiellen Ableitungen nach den generalisierten Koordinaten sind, so dass

$$(1.3.8) \quad \delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} c_k,$$

mit passend wählbaren Konstanten  $c_k$  mit  $k = 1, \dots, f$  gilt.<sup>40)</sup>

---

<sup>40)</sup>Diese Beziehung kann man sich so verdeutlichen: Das vollständige Differential der Funktion  $\vec{r}_i(\vec{q}_i, t)$  lautet allgemein

$$d\vec{r}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt.$$

Soll nun zu jedem Zeitpunkt, also für  $dt = 0$ , das vollständige Differential  $d\vec{r}_i$  mit der virtuellen Verrückung  $\delta\vec{r}_i$  übereinstimmen, müssen die  $dq_k$  bestimmte Werte annehmen, so dass die neuen Orte  $\vec{r}_i + d\vec{r}_i = \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i$  auf der für jeden Zeitpunkt durch  $\vec{r}_i(\vec{q}_i, t)$  festgelegten Fläche verbleiben. Die zu dieser Forderung passenden  $dq_k = \delta q_k$  sind dann mit den Konstanten  $c_k$  gemeint.

In Gl. (1.3.7) tauchen die Ausdrücke  $\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i$  und  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$  auf, die wir mit den Beziehungen

$$(1.3.9) \quad \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{k=1}^f \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} c_k$$

$$(1.3.10) \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} c_k = \sum_{k=1}^f \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} c_k = \sum_{k=1}^f Q_k c_k .$$

umformen wollen. Wir eliminieren die zweite Ableitung  $\ddot{\vec{r}}_i$  mittels der aus der Produktregel folgenden Identität

$$(1.3.11) \quad \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} .$$

Außerdem können wir mit der Kettenregel für die erste Ableitung  $\dot{\vec{r}}_i$

$$(1.3.12) \quad \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} ,$$

schreiben und erhalten, wenn wir diese Beziehung nach  $\dot{q}_k$  ableiten auch noch den Zusammenhang

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} .$$

Mit den Beziehungen (1.3.11) und (1.3.12) lässt sich die Umformung

$$(1.3.13) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \right) \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) T \end{aligned}$$

nachrechnen, in der die kinetische Energie

$$(1.3.14) \quad T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

des Systems aus allen Massenpunkten auftaucht.

Insgesamt erhalten wir mit der generalisierten Arbeit (1.3.10) aus der Gl. (1.3.7)

$$\sum_{k=1}^f \left( Q_k - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) T \right) c_k = 0$$

als Zwischenergebnis. Da nun die Werte der Zahlen  $c_k$  von Null verschieden und unabhängig vom Klammerausdruck gewählt werden können, wird vorstehendes Zwischenergebnis nur dann erfüllbar, wenn in jedem Summanden

$$(1.3.15) \quad Q_k - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) T = 0 \quad \text{mit} \quad k = 1, \dots, f$$

gilt.

Im Prinzip sind wir damit am Ziel. In dieser Formulierung tauchen zunächst keine Zwangskräfte mehr auf. Ein weiterer Vorteil ist, dass jede dieser  $k$  Gleichungen keine vektoriellen Größen mehr enthält, sondern lediglich die Skalare  $Q_k$  und die kinetische Gesamtenergie  $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2$ . Den Preis den wir dafür zu zahlen haben, beglichen wir den generalisierten Koordinaten.

Wir wollen vor einer weiteren Diskussion den wichtigen Spezialfall betrachten, dass alle resultierenden äußeren Kräfte  $\vec{F}_i$  ein Potential  $V$  besitzen und deshalb durch

$$(1.3.16) \quad \vec{F}_i = -\text{grad}_{\vec{r}_i} V(\vec{r}(\vec{q}, t), \dot{\vec{r}}(\vec{q}, t), t)$$

ausgedrückt werden können. Dann werden sich auch die  $Q_k$  als Ableitungen des Potentials  $V$  präsentieren:

$$(1.3.17) \quad Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^n \text{grad}_{\vec{r}_i} V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial V(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_k}$$

Mit der **Lagrange-Funktion**  $\mathcal{L} = T + W$  bzw.  $\mathcal{L} = T - V$  können wir Gl. (1.3.15) nun schreiben

$$(1.3.18) \quad \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = 0 \quad \text{mit } k = 1, \dots, f$$

Dies sind die **Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art**.<sup>41)</sup>

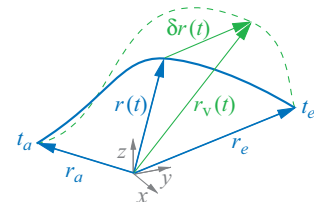
### Übung

Zeigen Sie, dass die Beziehung (1.3.15) für den Fall der uneingeschränkten Bewegung im  $\mathbb{R}^{3n}$  wieder auf die Newtonschen Bewegungsgleichungen (1.3.6) führt.

## 1.3.2 Herleitung der Lagrangeschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip

Jetzt soll noch ein weiteres Vorgehen vorgestellt werden, die Lagrangeschen Gleichungen herzuleiten. Ausgangspunkt sind wieder die Newtonschen Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingungen (1.3.6), die Berücksichtigung von Zwangsbedingungen mit dem Prinzip der Virtuellen Verrückung, was auf Gl. (1.3.7) führt.

Anders als bei der vorstehenden Herleitung betrachten wir nun das Zeitintegral der Gl. (1.3.7) und eine Variation der Bahnkurve mittels virtueller Verrückungen, was auf ein Variationsprinzip, nämlich das **Hamiltonsche Prinzip** führt, wonach das Zeitintegral einen Extremwert annimmt.



Die in Abb. 1.3.1 dargestellte blaue Kurve  $\vec{r}(t)$  sei die Bahnkurve aller  $n$  Massenpunkte im  $\mathbb{R}^{3n}$ , die der gesuchten Lösung der Bewegungsgleichung entspricht.

Abb. 1.3.1: Wahre Bahn (in blau dargestellt) und virtuelle Verrückung

<sup>41)</sup>Eine typische geschwindigkeitsabhängige Kraft ist zum Beispiel die Lorentzkraft, die auch ein Potential besitzt. Außerdem sind Reibungskräfte im Allgemeinen geschwindigkeitsabhängig. Bei Reibungskräfte ist aber zu beachten, dass diese keine Potential besitzen.

Dies ist also die wahre Bahn, die die Massenpunkte zwischen den Punkten  $\vec{r}_a = \vec{r}(t_a)$  und  $\vec{r}_e = \vec{r}(t_e)$  durchlaufen.

Wir betrachten nun eine virtuelle Bahn  $\vec{r}_v(t)$  aller Massenpunkte, die sich von der wahren Bahn durch eine virtuelle Verrückung  $\delta\vec{r}(t)$  mit

$$(1.3.19) \quad \delta\vec{r}(t) = \vec{r}_v(t) - \vec{r}(t)$$

ergibt, wobei Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen sollen,<sup>42)</sup>

$$(1.3.20) \quad \vec{r}_a = \vec{r}_v(t_a) \quad \text{und} \quad \vec{r}_e = \vec{r}_v(t_e)$$

oder auch

$$(1.3.21) \quad \delta\vec{r}(t_a) = \delta\vec{r}(t_e) = 0.$$

Auch soll wieder für zulässige virtuelle Verrückung gelten, dass die  $\delta\vec{r}(t)$  mit den Zwangsbedingungen verträglich sind, weshalb die zweite Gleichung des Systems (1.3.6)

$$\vec{F}_Z \cdot \delta\vec{r}(t) = 0$$

wieder stets automatisch erfüllt ist. Für die virtuelle Änderung der Geschwindigkeit aller Massenpunkte folgt

$$(1.3.22) \quad \begin{aligned} \delta\dot{\vec{r}}(t) &= \dot{\vec{r}}_v(t) - \dot{\vec{r}}(t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_v(t + \Delta t) - \vec{r}_v(t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\vec{r}(t + \Delta t) - \delta\vec{r}(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

also

$$(1.3.23) \quad \delta\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} \delta\vec{r}(t).$$

Wie bei der vorigen Herleitung der Lagrangeschen Gleichung multiplizieren unsere Bewegungsgleichung (1.3.6) wieder mit der virtuellen Verrückung und erhalten die Beziehung (1.3.7)

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i.$$

Nun aber integrieren wir diese Gleichung zeitlich für das Zeitintervall, in dem wir die Lösung der Bewegungsgleichung finden wollen, also zwischen dem Anfangszeitpunkt  $t_a$  und dem Endzeitpunkt  $t_e$ :

$$(1.3.24) \quad \int_{t_a}^{t_e} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i \, dt = \int_{t_a}^{t_e} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \, dt$$

Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass die integrale Aussage (1.3.24) äquivalent zur differentiellen Beziehung (1.3.7) und zur Bewegungsgleichung (1.3.6) ist, was nicht zwingend ist, da bei einem Integrationsprozess ganz allgemein Information verloren geht. Gl. (1.3.24) gilt jedoch für jede Verrückung, die mit den Zwangsbedingungen kompatibel ist. Wir können deshalb  $\delta\vec{r}_i$  so wählen, dass es nur in einem kleinen Zeitintervall um die Zeit  $t$  von Null verschieden ist. Damit folgt aus der Gleichheit der Integrale auch die Gleichheit der Integranden zu jeder Zeit  $t_a \leq t \leq t_e$ . Und weiter, da Gl. (1.3.7) aus Gl. (1.3.6) hervorgeht, ist die Aussage

<sup>42)</sup>Die virtuelle Bahn ist damit keine Lösung der Bewegungsgleichungen.

(1.3.24) äquivalent zur Bewegungsgleichung.

Mittels partieller Integration wird die linke Seite von Gl. (1.3.24) umgeformt in

$$(1.3.25) \quad \int_{t_a}^{t_e} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \, dt = \sum_{i=1}^n \left( m_i \dot{\vec{r}}_i(t_e) \cdot \delta \vec{r}_i(t_e) - m_i \dot{\vec{r}}_i(t_a) \cdot \delta \vec{r}_i(t_a) \right) - \int_{t_a}^{t_e} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i \, dt,$$

und es folgt weiter aus der Voraussetzung, dass die virtuellen Verrückungen von Anfangs- und Endpunkt der Bahn laut den Randbedingungen (1.3.21) Null sein sollen,

$$(1.3.26) \quad \int_{t_a}^{t_e} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \, dt = - \int_{t_a}^{t_e} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i \, dt.$$

Wir erhalten also

$$(1.3.27) \quad - \int_{t_a}^{t_e} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i \, dt = \int_{t_a}^{t_e} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \, dt.$$

Das Integral der linken Seite kann mit der kinetischen Energie  $T_i = \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2$  des  $i$ -ten Massenpunktes wegen

$$(1.3.28) \quad \delta T = \sum_{i=1}^n \delta T_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left( \dot{\vec{r}}_i + \delta \dot{\vec{r}}_i \right)^2 - \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i.$$

durch die Änderung der kinetischen Energie aller Massenpunkte

$$(1.3.29) \quad \int_{t_a}^{t_e} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i \, dt = \int_{t_a}^{t_e} \delta T \, dt$$

ausgedrückt werden. Das Integral der rechten Seite stellt die bei der virtuellen Verrückung geleistete Arbeit

$$(1.3.30) \quad \sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

der äußeren Kräfte auf die Massenpunkte dar. Wir erhalten also insgesamt

$$(1.3.31) \quad \int_{t_a}^{t_e} \delta (T + W) \, dt = 0$$

Da die Zeitpunkte  $t_a$  und  $t_e$  festgehalten worden sind, kann man die Variation auch vor das Integral ziehen, so dass

$$(1.3.32) \quad \delta \int_{t_a}^{t_e} (T + W) \, dt = 0$$

wird. Das Integral in Gl. (1.3.32) ist ein Funktional der Bahnkurve und wird in der Physik als **Wirkung  $S$**  oder **Wirkungsintegral** bezeichnet:

$$(1.3.33) \quad S = \int_{t_a}^{t_e} (T + W) \, dt$$

Für die wahre Bahn gilt also, dass für die Wirkung die Bedingung 1.3.32 erfüllt sein muss. Für die wahre Bahn stellt sich also für das Wirkungsintegral  $S$  ein Extremwert ein. Man sagt, das Wirkungsintegral  $S$  ist für die wahre Bahn stationär, was heißen soll, dass sich für die wahre Bahn der Wert des Wirkungsintegral gegenüber einer virtuellen Verrückung nicht ändern soll. Das ist das [Hamiltonsche Prinzip](#) der Mechanik.

Unsere Ableitung hat gezeigt, dass die Aussage (1.3.32) äquivalent zur Aussage der Newtonschen Bewegungsgleichung ist. Eine besondere Darstellung der Wirkung erhält man wieder, wenn alle Kräfte ein Potential besitzen. Dann gilt wieder Gl. (1.3.16)

$$\vec{F}_i = -\text{grad}_{\vec{r}_i} V(\vec{r}(\vec{q}, t), \dot{\vec{r}}(\vec{q}, t), t)$$

und

$$\vec{F}_i = -\text{grad } V_i, \quad \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = -\text{grad } V_i \cdot \delta \vec{r}_i = -\delta V_i$$

und  $\delta W_i$  wird mit  $\delta V_i$  identisch, so dass wir nach Summation über alle Massenpunkte

$$(1.3.34) \quad S = \int_{t_a}^{t_e} (T - V) dt$$

und

$$(1.3.35) \quad \delta \int_{t_a}^{t_e} (T - V) dt = 0$$

erhalten.

Wir müssen nun noch aus dem Hamiltonschen Prinzip eine Bewegungsgleichung ableiten. Dazu betrachten wir die Lagrange-Funktion

$$(1.3.36) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T + W \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T - V$$

und berechnen die Variation (1.3.32) bzw. (1.3.35)

$$(1.3.37) \quad \delta \int_{t_a}^{t_e} \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt = \sum_{k=1}^f \int_{t_a}^{t_e} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt,$$

wobei die Zeit nicht variiert werden soll. Mit partieller Integration erhalten wir für den zweiten Summanden im rechten Integral

$$(1.3.38) \quad \int_{t_a}^{t_e} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{t_a}^{t_e} - \int_{t_a}^{t_e} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt.$$

Da der erste Summand wegen  $\delta q_k(t_a) = \delta q_k(t_e) = 0$  verschwindet, ergibt sich insgesamt

$$(1.3.39) \quad \delta \int_{t_a}^{t_e} \mathcal{L} dt = \sum_{k=1}^f \int_{t_a}^{t_e} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit nach dem Hamiltonschen Prinzip dieser Ausdruck für jede mögliche Variation der wahren Bahn verschwindet, muss der Integrand verschwinden:

$$(1.3.40) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f$$

Dies sind wieder die [Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art](#).



### 1.3.3 Abschließende Bemerkungen zur Lagrangeschen Mechanik

Gegenüber der Newtonschen Bewegungsgleichung hat diese Formulierung der Mechanik folgende Vorteile:

- Sowohl der Wert der kinetischen Energie  $T_i$  als auch der Arbeit  $W_i$  oder der potentiellen Energie  $V_i$  sind nicht von den Koordinaten, in denen die Bewegung beschrieben wird, abhängig.
- das Wirkungsintegral (1.3.33) bzw. (1.3.34) ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten.
- Das Hamiltonsche Prinzip (1.3.32) bzw. (1.3.35) ist unabhängig von den verwendeten Koordinaten.
- Die Aussagen (1.3.32) bzw. (1.3.35) sind nicht auf Inertialsysteme beschränkt, da das Hamiltonsche Prinzip auch auf zeitabhängige Koordinatentransformationen gültig ist. Lediglich die Formulierung von kinetischer Energie und Arbeit bzw. potentieller Energie müssen primär auf ein Inertialsystem bezogen sein.
- Die Transformation der Newtonschen Bewegungsgleichungen auf allgemeine Koordinaten liefert komplizierte Ausdrücke, da in den Bewegungsgleichungen zweite Ableitungen vorkommen. In der vorliegenden Formulierung sind jedoch in der kinetischen Energie und in den Kräften nur erste Ableitungen nach der Zeit zu berücksichtigen.
- Wenn die Freiheitsgrade des Problems durch Bahnführungen eingeschränkt sind, müssen wegen der Benutzung der generalisierten Koordinaten nicht berechnet werden, um die Bahnkurve der Massenpunkte zu ermitteln.

Die Vorgehensweise bei Verwendung der Gl. (1.3.18) zur Lösung eines Problems der Dynamik von  $n$  Massenpunkten, die äußeren Kräften mit Potentialfunktion und einer Einschränkung auf  $3n - k = f$  Freiheitsgraden unterliegen, gestaltet sich damit wie folgt:

- Zuerst werden kinetische Energie  $T$  und Potential  $V$  als Funktion der generalisierten Koordinaten  $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t$  ausgedrückt.
- Damit wird als nächster Schritt die Lagrange-Funktion

$$(1.3.41) \quad \mathcal{L} = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

gebildet, die typischerweise eine Funktion der generalisierten Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten sowie der Zeit ist.

- Anschließend werden die Bewegungsgleichungen (1.3.40) ausgewertet.
- Im letzten Schritt werden die sich daraus ergebenden Beziehungen integriert.

Beispiel: Frei beweglicher Massenpunkt auf rotierender, kreisförmiger Schleife

Auf einer im Schwerfeld der Erde mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  rotierenden, kreisförmigen Schleife vom Radius  $r$  gleitet ein Massenpunkt der Masse  $m$  frei beweglich.

Geg.:  $m, r, \vec{\omega}, \vec{g}$ , Richtungssinn der Vektoren nach Abb. 1.3.2

Ges.:

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Problems auf!
- Welche Erhaltungsgröße ergibt sich?
- Welche Gleichgewichtslagen stellen sich für konstante Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  ein?
- Bestimmen Sie die Stabilität der Gleichgewichtslagen!

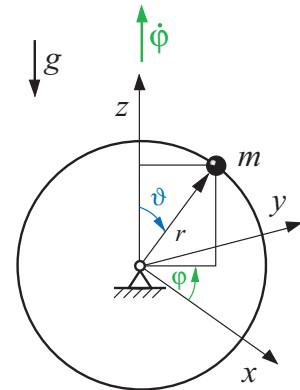


Abb. 1.3.2: Massenpunkt auf rotierender Kresschleife

Lösung

a) Die  $z$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems soll, wie in der Abb. 1.3.2 gezeigt, mit der Rotationsachse der Schleife zusammenfallen. Die dem Problem angepassten Koordinaten, die die, durch die Schleife bestimmten Zwangsbedingungen, berücksichtigen, sind Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad (\text{B1.3.2})$$

Um die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L} = T - V$  aufzustellen, müssen wir kinetische  $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  und potentielle Energie  $V = m g z$  in diesen Polarkoordinaten formulieren. Mit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r \cos \vartheta \cos \varphi \dot{\vartheta} - r \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= r \cos \vartheta \sin \varphi \dot{\vartheta} + r \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{z} &= -r \sin \vartheta \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (\text{B1.3.3})$$

erhalten wir

$$T = \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2), \quad V = m g r \cos \vartheta \quad (\text{B1.3.4})$$

Für die Lagrange-Funktion ergibt sich damit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - m g r \cos \vartheta. \quad (\text{B1.3.5})$$

Die generalisierten Koordinaten in der Lagrangeschen Bewegungsgleichung (1.3.40) sind also  $q_1 = \varphi$ ,  $q_2 = \vartheta$  und deren zeitliche Ableitungen  $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}$ ,  $\dot{q}_2 = \dot{\vartheta}$ . Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (\text{B1.3.6})$$

folgen also die beiden Differentialgleichungen

$$(B1.3.7) \quad \begin{aligned} q_1 = \varphi : \quad \frac{d}{dt} (\sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) &= 0 \\ q_2 = \vartheta : \quad \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{r} \sin \vartheta - \ddot{\vartheta} &= 0. \end{aligned}$$

für das vorliegende Problem.

b) Die erste Bewegungsgleichung zeigt, dass die Größe  $\sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$  eine Erhaltungsgröße in diesem Problem ist. Dies entpuppt sich letztlich als die  $z$ -Komponente des Drehimpulses

$$(B1.3.8) \quad L_z = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = m r v_{xy} \sin \vartheta \quad \text{mit} \quad v_{xy} = r \sin \vartheta \dot{\varphi} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

wie man aus der Darstellung des Drehimpulse in kartesischen Koordinaten

$$(B1.3.9) \quad \begin{aligned} L_x &= m (y \dot{z} - z \dot{y}) \\ L_y &= m (z \dot{x} - x \dot{z}) \\ L_z &= m (x \dot{y} - y \dot{x}) \end{aligned}$$

auch leicht nachrechnet.

c) Die Gleichgewichtslagen ergeben sich aus der zweiten Differentialgleichung und der Forderung, dass  $\ddot{\vartheta} = 0$  sein soll. Wir erhalten:

$$(B1.3.10) \quad \vartheta = 0, 2\pi \quad \text{und falls } r\dot{\varphi}^2 \geq g: \quad \vartheta = \arccos \left( -\frac{g}{r\dot{\varphi}^2} \right)$$

Zur Bestimmung der Stabilität der Gleichgewichtslagen können die Vorzeichen der Ableitung

$$(B1.3.11) \quad \frac{\partial \ddot{\vartheta}}{\partial \vartheta} = (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{r} \cos \vartheta$$

herangezogen werden. Einsetzen der Gleichgewichtslagen liefert:

$$(B1.3.12) \quad \frac{\partial \ddot{\vartheta}}{\partial \vartheta} = \begin{cases} \left(1 + \frac{g}{r\dot{\varphi}^2}\right) \dot{\varphi}^2 & \text{für } \vartheta = 0 \\ \left(1 - \frac{g}{r\dot{\varphi}^2}\right) \dot{\varphi}^2 & \text{für } \vartheta = \pi \\ \left(\left(\frac{g}{r\dot{\varphi}^2}\right)^2 - 1\right) \dot{\varphi}^2 & \text{für } \cos \vartheta = -\frac{g}{r\dot{\varphi}^2} \text{ falls } \dot{\varphi}^2 \geq \frac{g}{r} \end{cases}$$

Es ergibt sich folgende Tabelle:

$\vartheta$	$\dot{\varphi}^2$	$\frac{\partial \ddot{\vartheta}}{\partial \vartheta}$	Gleichgewicht
0	bel.	$> 0$	labil
$\pi$	$r \dot{\varphi}^2 < g$	$< 0$	stabil
	$r \dot{\varphi}^2 = g$	$= 0$	indifferent
	$r \dot{\varphi}^2 > g$	$> 0$	labil
$\arccos\left(-\frac{g}{r \dot{\varphi}^2}\right)$	$r \dot{\varphi}^2 > g$	$< 0$	stabil

### Übungen

1. Zeigen Sie, dass in der Formulierung für einen Massenpunkt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, 3$$

die Newtonsche Bewegungsgleichung enthalten ist!

2. Die Bewegung des Massenpunktes  $m$  der Abb. 1.3.3 wird im Schwerfeld  $\vec{g}$  der Erde durch den masselosen Faden konstanter Länge  $l$  auf eine Kugeloberfläche mit dem Aufhängepunkt als Mittelpunkt eingeschränkt.

- a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen in sphärischen Polarkoordinaten mit der Richtung der Schwerkraft als Polarachse und zeigen Sie damit, dass sich die Erhaltungsgröße

$$L_z = m l^2 \dot{\varphi} \sin \vartheta$$

ableiten lässt!

- b) Zur Lösung der Bewegungsgleichungen für kleine  $|\vartheta| \ll 1$  soll die Lagrange-Funktion bis zu quadratischen Gliedern in  $\vartheta$  entwickelt und neuen Koordinaten

$$\xi = l \vartheta \cos \varphi, \quad \eta = l \vartheta \sin \varphi$$

eingeführt werden. Wie lauten die Bewegungsgleichungen und ihre Lösungen in den  $\xi, \eta$ -Koordinaten?

- c) Zeigen Sie, dass in den neuen Koordinaten

$$L_z = m (\xi \dot{\eta} - \dot{\xi} \eta)$$

ist!

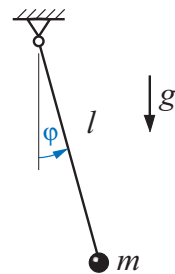


Abb. 1.3.3: Fadenpendel

## 2 Dynamik des starren Körpers

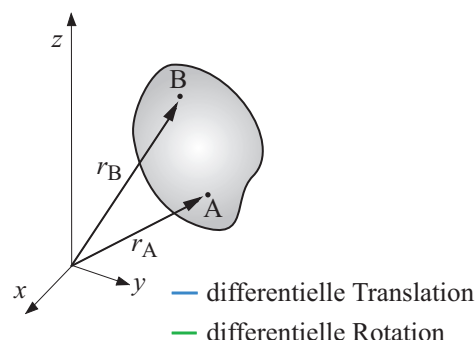
### 2.1 Kinematik des starren Körpers

Wir wollen in den nächsten beiden Kapiteln Körper nicht mehr nur als Massenpunkte ansehen, sondern die tatsächlich vorhandene Ausdehnung berücksichtigen. Wir werden sehen, teilweise haben wir dies schon bei Systemen von Massenpunkten diskutiert, dass die Ausdehnung nicht in jedem Fall die Dynamik der Bewegung beeinflusst, oft reicht es die Masse im Schwerpunkt zu konzentrieren. Immer aber, wenn die Rotationsbewegungen von Körpern eine Rolle spielt oder zu beschreiben ist, reicht die Betrachtung eines Punktes jedoch nicht mehr aus.

Wenn damit wesentliche Vereinfachungen verbunden sind, werden wir die Körper als starr ansehen. Dies ist zum Beispiel in der Kinematik ausgedehnter Körper der Fall, die wir im direkt anschließenden Kapitel 2.1.1 besprechen werden. Im Kapitel 2.2 werden wir dann die Kinetik ausgedehnter Körper betrachten.

#### 2.1.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung von Punkten eines starren Körpers

Die Abbildung zeigt die Lage eines dreidimensionalen starren Körpers im Raum zur Zeit  $t$  und zu einem differentiell späteren Zeitpunkt  $t + dt$ . Die räumliche Bewegung des starren Körpers lässt sich für ein solches differentiell Zeitintervall eindeutig durch die Überlagerung einer **differentiellen Translation** und einer **differentiellen Rotation** beschreiben. Eine solche Betrachtung hatten wir in der Statik bei der Einführung der Arbeit von Kräften und zur Diskussion der Methode der Virtuellen Arbeit bereits durchgeführt.



Bei einer reinen Translation verschieben sich alle materiellen Punkte des Körpers, da er starr sein soll, um die gleiche Strecke in die gleiche Richtung.

Als Referenzpunkt kann ein beliebiger Punkt, nennen wir ihn A, des Körpers gewählt werden, der dann automatisch ausschließlich eine reine Translation ausführt, mit

(2.1.1)

Die Translation ist in der Abbildung blau dargestellt. Alle anderen Punkte des Körpers, beispielhaft am Punkt B gezeigt, müssen die Translation von A mit ausführen:

(2.1.2)

Wenn der Körper aber gleichzeitig bezüglich einer momentanen Achse rotiert, muss der Punkt B eine zusätzliche Verschiebung durch diese Rotation erfahren. Die Rotation ist in Abb. ?? grün dargestellt. Bei starren Körpern ist der mit der Rotation verbundene differentielle Drehwinkel  $d\vec{\varphi}$  für alle Punkte des Körpers gleich. Mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_{B,A}$  eines Punktes B in Bezug auf den Referenzpunkt A verschiebt sich der Punkt B durch die überlagerte Rotation um

(2.1.3)

Die differentielle Verschiebung des Punktes B ist nun insgesamt die Summe aus der differentiellen Translation und der differentiellen Rotation

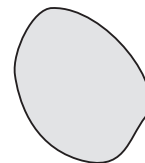
(2.1.4)

Die hier beschriebene Aufteilung einer allgemeinen Bewegung eines starren Körpers im Raum hat Euler eingeführt.

Mit der Definition der Geschwindigkeit folgt aus dieser Beziehung sofort

(2.1.5)

oder, da der zweite Term die momentane Tangentialgeschwindigkeit an die Kreisbahn von B um A darstellt, auch



Vektorplan

(2.1.6)

Der zweite Summand links vom Gleichheitszeichen in Gl. (2.1.5) ist letztlich wieder die Beziehungen, die wir für die Geschwindigkeit bei der Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn in Abschnitt 1.1 auf Seite 5 mit Gl. (1.1.20) gefunden hatten.

Für einen starren Körper legen die Kenntnis der Geschwindigkeit eines Punktes und die momentane Winkelgeschwindigkeit die Geschwindigkeit aller anderen Punkte auf dem Körper eindeutig fest.

Die Abbildung gibt diesen Zusammenhang mit Blickrichtung aus Richtung der Drehachse wieder.

Obwohl wir eine räumliche Bewegung betrachten, gibt es zu jedem Zeitpunkt eine Ebene, in der die Rotation für alle Körperpunkte als einfache Kreisbewegung mit dem passenden konstantem Radius beschrieben werden kann, da es sich nach Voraussetzung um einen starren Körper handelt. Mit dem zweiten Summanden links vom Gleichheitszeichen in Gl. (2.1.5) finden wir deshalb letztlich die Beziehung Gl. (1.1.20) wieder, die wir für die Geschwindigkeit bereits bei der Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn in Abschnitt 1.1 auf Seite 5 formuliert hatten.

### *Übung*

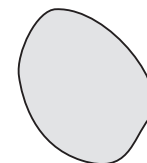
Zeigen Sie, dass die Kenntnis der Geschwindigkeit zweier Punkte A und B eines starren Körpers ausreicht, um die Geschwindigkeit eines beliebigen anderen Punktes C des Körpers zu berechnen.

Entsprechend einfach ist nun auch die Bestimmung der Beschleunigung, da für die Kreisbewegung die Einzelheiten bereits bekannt sind. Die Differentiation der Gleichung (2.1.6) nach der Zeit liefert:

$$(2.1.7)$$

Der erste Summand stellt die Beschleunigung des Referenzpunktes A dar, die wieder nur eine Translation sein kann, der zweiten Summand enthält die die Beschleunigung der Kreisbewegung von B um A. Diese setzt sich aus der Tangentialbeschleunigung aus der Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  sowie der Normalbeschleunigung der Kreisbewegung von B um A aus dem Abstand zum Referenzpunkt und der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  zusammen:

$$(2.1.8)$$



Vektorplan

wobei Tangential- und Normalbeschleunigung durch

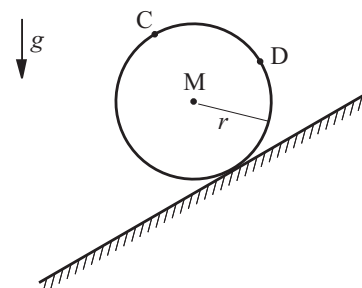
$$(2.1.9)$$

gegeben sind.

Die Beziehungen für die Tangential- und Normalbeschleunigung sind wieder identisch mit denjenigen, die wir bei der Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn in Abschnitt 1.1 auf Seite 11 mit den Gl. (1.1.30), 1.1.31) für die Normalbeschleunigung und mit Gl. (1.1.35) für die Tangentialbeschleunigung formuliert hatten.

### Beispiel 1: Kinematik des rollenden Rades

Wir wollen ein Rad mit Radius  $r$  betrachten, das sich auf einer feststehenden schiefen Ebene im Schwerfeld der Erde beschleunigt abwärts bewegt. Bei dieser Bewegung soll zwischen Rad und Untergrund am Auflagepunkt keine Relativbewegung stattfinden (schlupffrei  $\leftrightarrow$  rollendes Rad)<sup>43)</sup>.



Geg.:  $r, \vec{v}_M, \vec{a}_M, (\vec{g})$

<sup>43)</sup>Eine solche Relativbewegung zwischen Untergrund und dem momentanen Berührungspunkt am Umfang des Rades würde bedeuten, dass das Rad auf jeden Fall auf der Unterlage rutscht. Dies schließt nicht automatisch ein gleichzeitiges Rotieren des Rades um den Mittelpunkt M aus.



Ges.: Bestimmen Sie für rollendes Rad

- Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  und Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  des Rades,
- Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte B, C und D!

*Lösung*

Da vorausgesetzt ist, dass kein Rutschen zwischen Rad und Ebene im Berührungspunkt B auftritt, ist neben der in der Aufgabenstellung gegebenen Geschwindigkeit des Punktes M auch die des Punktes B vollständig bekannt.

Die Eulersche Beziehung für die Geschwindigkeiten werten wir deshalb für die beiden Punkte  $A \equiv M$  und B für die Richtung tangential zur Bahn aus:

$$(B2.1.1)$$

Als einzige Unbekannte tritt darin die gesuchte Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  auf. Mit den Definitionen aus dem Lageplan folgt

$$(B2.1.2)$$

Das positive Vorzeichen signalisiert, dass die Winkelgeschwindigkeit mit dem richtigen Richtungssinn in den Lageplan eingetragen ist. Überdies wird auch die  $y$ -Komponente der Geschwindigkeit Null:  $v_{yB} = 0$ .

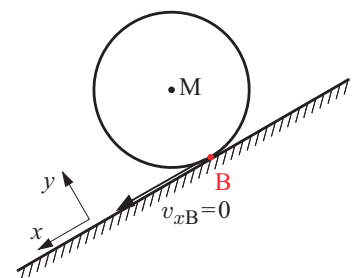
Analog werten wir auch die Eulersche Beziehung für die Beschleunigung

$$(B2.1.3)$$

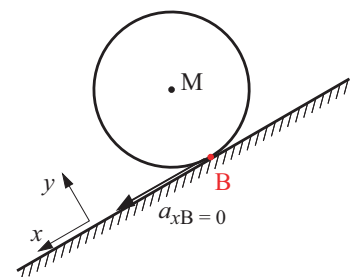
für die Richtung parallel zur Bahn aus, wobei wir die Komponente der Beschleunigung des Punktes B tangential zur Unterlage wieder mit der Beschleunigung des Untergrunds gleichsetzen dürfen:

$$(B2.1.4)$$

Lageplan Geschwindigkeiten



Lageplan Beschleunigungen



Dagegen verschwindet die Beschleunigung des Punktes B normal zur Bahn nicht. Es ist:

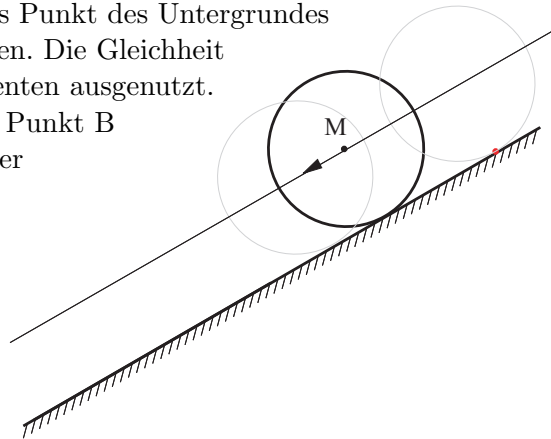
(B2.1.5)

Die Beziehungen für die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung nennen wir die Abrollbedingungen eines nichtrutschenden Rades für den Fall des feststehenden Untergrundes.

Es sei darauf hingewiesen, dass der Berührungspunkt B einmal aufgefasst als Punkt des Rades und ein andermal als Punkt des Untergrundes nicht dieselbe Beschleunigung  $\vec{a}_B$  aufweisen. Die Gleichheit haben wir nur für die Tangentialkomponenten ausgenutzt.

Bezüglich der Beschleunigung besitzt der Punkt B des Rades eine Normalkomponente von der Unterlage senkrecht nach oben  $a_{n,B} > 0$ , wogegen die ruhende Unterlage gar keine Beschleunigung aufweist.

Die Bahnkurve, die der Punkt B durchläuft wird [Zykloide](#) genannt.



Nach Kenntnis der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung können die Punkte C und D betrachtet werden.

Wir haben nun die Wahl den Referenzpunkt A mit M oder mit B zu identifizieren. Bleiben wir bei M so ergibt sich mit

$$(B2.1.6)$$

für die Richtung tangential zur Bahn ( $x$ -Richtung)

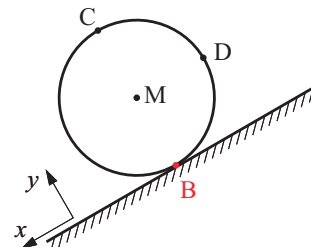
$$(B2.1.7)$$

und für die Richtung normal zur Bahn ( $y$ -Richtung)

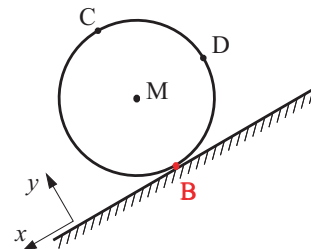
$$(B2.1.8)$$

so dass letztlich  $v_C = v_{xC} = 2v_M$ . Offensichtlich nimmt die Geschwindigkeit aller Punkte auf der Strecke  $\overline{BC}$  senkrecht zur Ebene linear zu und weist in Richtung der schiefen Ebene. Wir könnten uns die Scheibe durch einen sehr dünnen, momentan senkrecht stehenden Stab ersetzt denken, der gerade mit  $\dot{\varphi}$  um den Punkt B kippt.

Lageplan Geschwindigkeiten



Lageplan Beschleunigungen



Vektorpläne für D

Für den Punkt D erhalten wir für die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung

$$(B2.1.9)$$

und in die in  $y$ -Richtung

$$(B2.1.10)$$

so dass die resultierende Geschwindigkeit mit der Parallelen zur Ebene einen Winkel von  $\pi/4$  einschließt. Damit ist auch die Steigung der Zykloide im Abstand  $r$  zur Unterlage gerade  $\pi/4$ .

Die Beschleunigungskomponenten von C ergeben sich zu

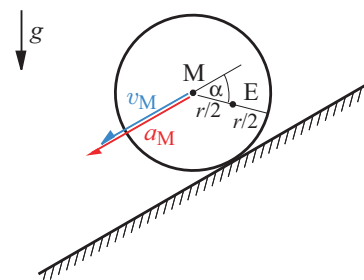
$$(B2.1.11)$$

und für D

$$(B2.1.12)$$

### Übung

Bestimmen Sie für das rollendes Rad des vorstehende Beispiels die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes E, dessen Koordinaten durch den Abstand  $r/2$  und den Winkel  $\alpha$  in Bezug auf den Mittelpunkt M angegeben werden können!



*Beispiel 2: Kinematik des einfachen Schubkurbeltriebs*

Eine Schubkurbel besteht aus einer Kurbel der Länge  $r$  und einem Pleuel der Länge  $l$ , das einen Kolben bewegt, der horizontal geführt wird.

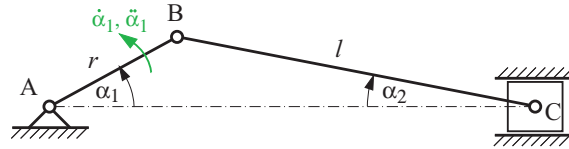
Geg.:  $r, l, \vec{\alpha}_1, \dot{\vec{\alpha}}_1, \ddot{\vec{\alpha}}_1$

Zahlenwerte:

$$r = 0,4 \text{ m}, l = 1 \text{ m},$$

$$\alpha_1 = \pi/6, \dot{\alpha}_1 = 10 \text{ s}^{-1}, \ddot{\alpha}_1 = 10 \text{ s}^{-2},$$

Richtungssinn der Vektoren nach Skizze



Ges.: Bestimmen Sie für die Schubkurbel in der skizzierten Lage

- die Geschwindigkeit  $\vec{v}_C$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\vec{\alpha}}_2$ !
- die Beschleunigung  $\vec{a}_C$  und die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\vec{\alpha}}_2$ !

*Lösung*

Kurbel und Pleuel werden als starre Körper angesehen, die im Punkt B ankoppeln, der also beiden gemeinsam ist. Die Beschreibung der Bewegung von Punkt B gelingt zunächst durch die vorgeschriebene Bewegung der Kurbel um den festen Punkt A. Im nächsten Schritt - Punkt B wird jetzt als Punkt des Pleuels aufgefasst - kann dann die Bewegung des Punktes C beschrieben werden. Dabei existiert die Nebenbedingung, dass die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes C durch die Führung als horizontal vorgeschrieben ist.

Die Beziehungen nach Euler liefern

$$(B2.1.13)$$

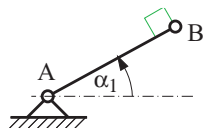
Von der Geschwindigkeit  $\vec{v}_C$  und der Beschleunigung  $\vec{a}_C$  kennen wir die Richtung, da diese von der Führung und dem Gleitstein vorgegeben ist. In einem Lageplan können wir deshalb die horizontale Richtungen der gesuchten Vektoren  $\vec{v}_C$  und  $\vec{a}_C$  vorab eintragen, Wirkungslinie  $W_{v_C}$  und  $W_{a_C}$ .

Anschaulich wissen wir, dass positive Winkelgeschwindigkeit und positive Winkelbeschleunigung der Kurbel zu einer Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes C nach links führen wird. Unser Ergebnis sollte unsere Anschauung diesbezüglich bestätigen.

Für die Kurbel errechnen wir die Geschwindigkeit und Beschleunigungskomponenten des Punktes B zu

(B2.1.14)

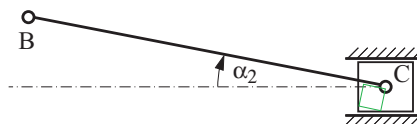
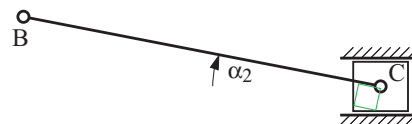
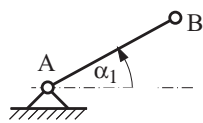
Lagepläne



Wir übernehmen diese Ergebnisse für das Pleuel und nutzen bekannten Betrag und Richtungssinn für eine grafische Lösung in Vektorplänen.

Im Vektorplan für die Geschwindigkeit  $\vec{v}_C$  kennen wir Betrag und Richtungssinn der Geschwindigkeit  $\vec{v}_B$  sowie die Richtung der Wirkungslinien  $W_{v_C}$  und  $W_{v_{t_{C,B}}}$ . Damit ist die nach der Eulerschen Formel geforderte Vektorsumme eindeutig bestimmbar.

Vektorpläne für Punkt C



Wir lesen ab

(B2.1.15)

und errechnen

(B2.1.16)

Im Vektorplan für die Beschleunigung  $\vec{a}_C$  finden wir folgende Situation vor.

Die translatorische Beschleunigung des Pleuels wird durch den Punkt B definiert und ist selbst eine Vektorsumme aus zwei Komponenten  $\vec{a}_{t_{B_A}}$  und  $\vec{a}_{n_{B_A}}$ . Diese addieren wir zu  $\vec{a}_B$ . Außerdem kennen wir bereits die Normalbeschleunigung  $\vec{a}_{n_{C,B}}$ , da wir die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\alpha}_2$  des Pleuels bereits bestimmt haben. Für den Betrag erhalten wir

(B2.1.17)

und der Richtungssinn weist auf den Punkt B hin. Wir fügen diese Beschleunigung maßstäblich

im Vektorplan hinzu. Mit den bekannten Richtungen der Wirkungslinie der Beschleunigungen  $\vec{a}_{t_{C,B}}$  und  $\vec{a}_C$  können wir den resultierenden Vektor  $\vec{a}_C$  konstruieren. Wir lesen ab

$$(B2.1.18)$$

und errechnen eine Winkelbeschleunigung

$$(B2.1.19)$$

### 2.1.1.1 Zusammenfassung der Lösungsschritte zur Kinematik starrer Körper für zweidimensionale Probleme

Die Betrachtungen setzen voraus auf dem starren Körper einen Bezugspunkt A zu wählen und die Geschwindigkeit oder Beschleunigung eines anderen Punktes B des Körpers aus der durch A vorgegebenen Translation und der Drehung des Punktes B um A vektoriell zusammensetzen. Dies wird durch die Gleichungen

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B,A} \text{ bzw. } \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B,A} = \vec{a}_A + \vec{a}_{tB,A} + \vec{a}_{nB,A}$$

zum Ausdruck gebracht. Formal beinhaltet jede dieser Gleichungen für zweidimensionale Probleme sechs Geschwindigkeits- bzw. acht Beschleunigungskomponenten.

Durch geeignete Wahl von A oder auch B sind üblicherweise eine oder mehrere Komponenten bekannt, so dass die Anzahl an Unbekannten kleiner wird als die Anzahl von Komponenten. Die Gleichungen können nach Wahl eines Koordinatensystem grundsätzlich rechnerisch ausgewertet werden. Insbesondere aber für zweidimensionale Probleme bietet sich der im Folgenden beschriebene semi-grafische Weg an.

Es soll im Folgenden die Geschwindigkeit  $\vec{v}_A$  und Beschleunigung  $\vec{a}_A$  als gegeben betrachtet werden, wodurch der Translationsanteil der Bewegung des starren Körpers festgelegt ist. Die weiteren Schritte zur Bestimmung der Bewegung des Punkte B werden exemplarisch für die Beschleunigung  $\vec{a}_B$  durchgeführt. Das Vorgehen für die Geschwindigkeit  $\vec{v}_B$  ist analog.

Um die Vektorgleichungen für gewählte Koordinatenrichtungen auswerten zu können, ist es zweckmäßig in einem Lageplan in einem ersten Schritt zunächst Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\dot{\varphi}}$  und Winkelbeschleunigungsvektor  $\vec{\ddot{\varphi}}$  zu definieren.

Bei einem zweiten Schritt, der optional ist, kann der Abstandsvektor  $\vec{r}_{B,A}$  und die Kreisbahn von B um A eingetragen werden.

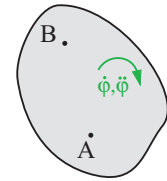
In einem dritten Schritt wird die Richtungen  $W_{a_A}$  sowie der Richtungssinn der Translationsbeschleunigung  $\vec{a}_A$  eingetragen.

In einem vierten Schritt sind die Richtungen des Rotationsanteils der Beschleunigungskomponenten  $W_{a_{tB,A}}$  und  $W_{a_{nB,A}}$  einzutragen. Dabei orientiert man sich an der Kreisbahn von B um A. Außerdem definiert man den Richtungssinn von Tangentialbeschleunigung  $\vec{a}_{tB,A}$  und Normalbeschleunigung  $\vec{a}_{nB,A}$  der Rotationsbewegung.

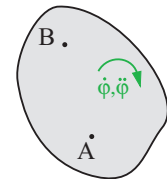
In einem fünften Schritt ist am Punkt B noch die Beschleunigung  $\vec{a}_B$  zu definieren. Dazu ist ein Koordinatensystem zu wählen, was die Koordinaten der Beschleunigung  $a_{Bx}$  und  $a_{By}$  eindeutig definiert. In der Abb. 2.1.1 ist das Koordinatensystem beliebig ausgerichtet. Je nach Fragestellung bietet es sich an diese Ausrichtung zweckmäßig zu wählen, etwa an  $\vec{a}_A$  oder  $\vec{a}_{tB,A}$  zu orientieren.

Es ist also zu beachten, dass am Punkt B mit  $a_B$  und  $\vec{a}_{B,A}$  zwei verschiedene Geschwindigkeitsvektoren eindeutig zu definieren sind.

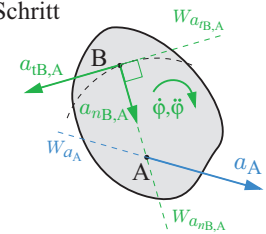
1. Schritt



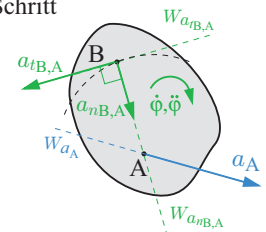
2. Schritt



3. Schritt



4. Schritt



5. Schritt

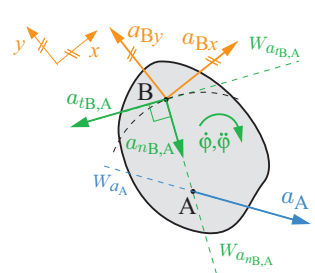


Abb. 2.1.1: Zur Anwendung der Eulerschen Formeln in zwei Dimensionen



Damit ist der grafische Anteil der Lösung abgeschlossen.

Der rechnerische Anteil der Lösung besteht nun darin, die Vektorbeziehungen für vorgegebene Richtungen auszuwerten, wobei durch die Definition in der Abb. 2.1.1 die Komponenten aller Vektoren eindeutig bestimmt sind. Der entsprechende Bildausschnitt aus Abb. 2.1.1 ist hier der Übersichtlichkeit halber nochmal aufgeführt.

In zwei Dimensionen können diese Vektordarstellungen für die Rotationsbewegung vereinfacht werden:

Die Beschleunigung  $\vec{a}_{B,A}$  setzt sich aus Tangentialkomponente mit

$$a_{tB,A} = -r_{B,A} \ddot{\varphi}$$

und Normalkomponente mit

$$a_{nB,A} = +r_{B,A} \dot{\varphi}^2$$

zusammen. Dabei nehmen die Vorzeichen Bezug auf den in Abb. 2.1.1 und 2.1.2 im 4. und 5. Schritt getroffenen Richtungssinn der Vektoren  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\varphi}$  sowie  $\vec{a}_{nB,A}$  und  $\vec{a}_{tB,A}$ .

Dies liefert beispielsweise, wenn die gegen die  $x$ -Achse positiv bewerteten Winkel  $\alpha_a$ ,  $\beta$  nach Abb. 2.1.2 eingeführt werden, für die Beschleunigungskomponenten die Beziehungen

$$a_{Bx} = +a_A \cos \alpha_a - a_{tB,A} \cos \beta - a_{nB,A} \sin \beta = +a_A \cos \alpha_a + r_{B,A} \ddot{\varphi} \cos \beta - r_{B,A} \dot{\varphi}^2 \sin \beta$$

$$a_{By} = -a_A \sin \alpha_a + a_{tB,A} \sin \beta - a_{nB,A} \cos \beta = -a_A \sin \alpha_a - r_{B,A} \ddot{\varphi} \sin \beta - r_{B,A} \dot{\varphi}^2 \cos \beta.$$

### Übung

Führen Sie die Schritte 1 bis 5 und die Auswertung in analoger Weise für die Geschwindigkeit  $\vec{v}_B$  am Punkte B aus!

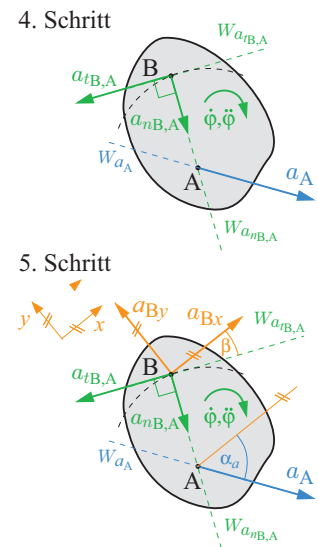


Abb. 2.1.2: Zur rechnerischen Auswertung der Eulerschen Formeln in zwei Dimensionen