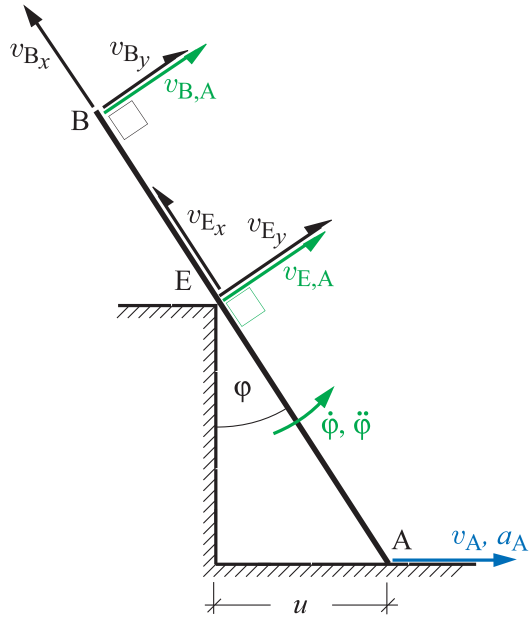
Dynamik

Aufgabe 6f

a) *Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung mittels Euler*



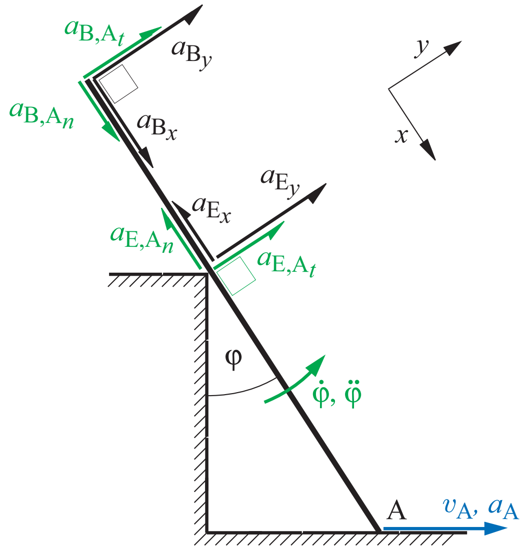
Die Bewegung des Punktes A ist vollständig beschrieben. Er dient deshalb als Bezugspunkt, um den translatorischen Teil der Bewegung (blau) der Leiter vorzugeben. Die Bedingung, dass die Leiter bei ihrer Bewegung bei E anliegt, legt dann den passenden rotatorischen Anteil (grün) fest und damit auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vec{\varphi}}$.

Es gilt also:

$$\vec{v}_{\mathrm{E}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{v}_{\mathrm{E,A}}$$

Damit die Leiter stets anliegt, muss der zur Leiter senkrecht stehende Anteil der Geschwindigkeit des Punktes E der Leiter verschwinden[1]:

$$v_{\mathrm{E}_y} \overset{!}{=} 0$$



Die vorstehende Vektorbeziehung wird deshalb in Richtung senkrecht zur Leiter ausgewertet. Mit den Definitionen der Vektoren aus der Zeichnung folgt:

$$v_{\mathrm{E}_y} = v_{\mathrm{A}} \cos\varphi + v_{\mathrm{E,A}} \overset{!}{=} 0 \quad \text{mit} \quad v_{\mathrm{E,A}} = -\frac{h}{\cos\varphi}\,\dot{\varphi}$$

Damit ergibt sich:

$$\dot{\varphi} = \frac{v_{\mathrm{A}}}{h} \cos^2\varphi$$

Kontrolle: Man kann die Winkelgechwindigkeit auch alternativ aus der geometrischen Beziehung $u = h\,\tan\varphi$ ableiten. Denn mit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{A}}$ folgt

$$v_{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h\,\tan\varphi\Big) = \frac{h}{\cos^2\varphi}\,\dot{\varphi}.$$

Damit erhält man durch nochmalige Differentiation die Winkelbeschleunigung $\ddot{\vec{\varphi}}$ zu

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_{\mathrm{A}}}{h}\cos^2\varphi\right) = \frac{a_{\mathrm{A}}}{h}\cos^2\varphi - \frac{v_{\mathrm{A}}}{h}\,2\cos\varphi\,\sin\varphi\,\dot{\varphi} = \frac{a_{\mathrm{A}}}{h}\cos^2\varphi - 2\,\frac{v_{\mathrm{A}}^2}{h^2}\cos^3\varphi\,\sin\varphi\,.$$

Damit ist die Winkelschwindigkeit und -beschleunigung der Leiter vollständig festgelegt. Vom Punkt A ausgehend, können daher die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller anderen Punkte der Leiter bestimmt werden.

[1]Demgegenüber wird die zur Leiter tangentiale Kompnente der Geschwindigkeit des Punktes E der Leiter von der Ecke nicht vorgeschrieben.

b) Für den Punkt E der Leiter, der momentan Berührpunkt mit der Ecke ist, folgt für die zur Leiter tangentiale Geschwindigkeitskomponente

$$v_{\mathrm{E}_x} = -v_\mathrm{A}\,\sin\varphi\,.$$

Die Translation des Punktes A in x-Richtung überträgt sich auf die Translation eines Punktes E der Leiter, der momentan Eckpunkt ist. Da die Rotation nur Beiträge in y-Richtung bewirkt, gilt dies auch für die x-Komponente jedes anderen Punktes auf der Leiter.

Für die Geschwindigkeit des Punktes B liefert Euler

$$\vec{v}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{B},x} \\ v_{\mathrm{B},y} \end{pmatrix} = \vec{v}_\mathrm{A} + \vec{v}_{\mathrm{B,A}} = \begin{pmatrix} -v_\mathrm{A}\,\sin\varphi \\ +v_\mathrm{A}\,\cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -l\,\dot\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_\mathrm{A}\,\sin\varphi \\ v_\mathrm{A}\,\cos\varphi\left(1-\dfrac{l\,\cos\varphi}{h}\right)\,. \end{pmatrix}$$

Anders verhält es sich mit der Beschleunigung des Punktes E der Leiter. Die Tatsache, dass der Punkt E auf der Leiter momentan mit der Ecke E der Wand zusammenfällt, bedeutet nicht, dass die Beschleunigung des Punktes E der Leiter in y-Richtung verschwindet. Laut Aufgabenpunkt a) ist neben $\dot{\vec{\varphi}}$ auch $\ddot{\vec{\varphi}}$ vorgeschrieben, woraus zusammen mit der Beschleunigung $\vec{a}_\mathrm{A}$ des Punktes A die Beschleunigung des Punktes E der Leiter eindeutig sowohl in x- und y-Richtung festgelegt ist.

Es ist nach Euler:

$$\vec{a}_\mathrm{E} = \vec{a}_\mathrm{A} + \vec{a}_{\mathrm{E,A}}$$

In y-Richtung liefert diese Beziehung mit den Richtungsdefinitionen der Vektoren nach Skizze zunächst

$$a_{\mathrm{E}_y} = a_\mathrm{A}\,\cos\varphi + a_{\mathrm{E,A}_t} \quad \text{mit} \quad a_{\mathrm{E,A}_t} = -\frac{h}{\cos\varphi}\,\ddot\varphi$$

und nach Einsetzen aller Größen

$$a_{\mathrm{E}_y} = a_\mathrm{A}\,\cos\varphi - \frac{h}{\cos\varphi}\left(\frac{a_\mathrm{A}}{h}\,\cos^2\varphi - 2\,\frac{v_\mathrm{A}^2}{h^2}\,\cos^3\varphi\,\sin\varphi\right) = 2\,\frac{v_\mathrm{A}^2}{h}\,\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,.$$

Analog folgt für die Beschleungigung in x-Richtung

$$a_{\mathrm{E}_x} = a_\mathrm{A}\,\sin\varphi + a_{\mathrm{E,A}_n} \quad \text{mit} \quad a_{\mathrm{E,A}_n} = -\frac{h}{\cos\varphi}\,\dot\varphi^2$$

und folglich

$$a_{\mathrm{E}_x} = -a_\mathrm{A}\,\sin\varphi - \frac{h}{\cos\varphi}\,\dot\varphi^2 = -a_\mathrm{A}\,\sin\varphi - \frac{v_\mathrm{A}^2}{h}\,\cos^3\varphi\,.$$

Für die Beschleunigung des Punktes B ergibt sich mit Euler insgesamt

$$\vec{a}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{B},x} \\ a_{\mathrm{B},y} \end{pmatrix} = \vec{a}_\mathrm{A} + \vec{a}_{\mathrm{B,A}} = \begin{pmatrix} a_\mathrm{A}\,\sin\varphi \\ a_\mathrm{A}\,\cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +l\,\dot\varphi^2 \\ -l\,\ddot\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\mathrm{A}\,\sin\varphi + \dfrac{v_\mathrm{A}^2\,l}{h^2}\,\cos^4\varphi \\ a_\mathrm{A}\,\cos\varphi\left(1-\dfrac{l\,\cos\varphi}{h}\right) + 2\,\dfrac{v_\mathrm{A}^2\,l}{h^2}\,\cos^3\varphi\,\sin\varphi \end{pmatrix}$$