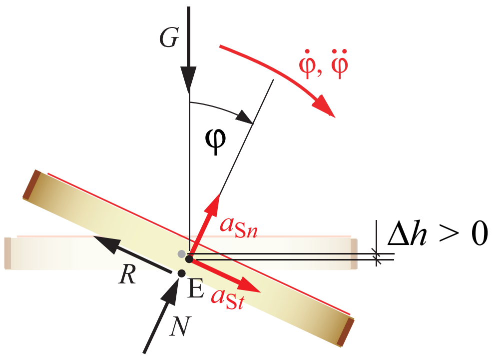
Lösung Aufgabe 10c

a) System in ausgelenkter, allgemeiner Lage:

Kein Rutschen $\quad\Rightarrow\quad$ Energieerhaltungssatz:

$$T(\varphi)+\cancelto{0}{T}(0) = V^{\mathrm{G}}(0)-V^{\mathrm{G}}(\varphi) = m\,g\,\Delta h \quad \text{mit} \quad \Delta h = \frac{h}{2}\,(1-\cos\varphi) > 0$$



Wegen Drehung um festen Punkt E gilt

$$T\varphi = \frac{1}{2}\,J_E\,\dot{\varphi}^2 \quad \text{mit} \quad J_{\mathrm{E}} = J_{\mathrm{S}} + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 ,$$

so dass sich für die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = +\sqrt{\frac{m\,g\,h}{J_E}\,(1-\cos\varphi)} = +\sqrt{\frac{12}{53}\,\frac{g}{h}\,(1-\cos\varphi)}$$

ergibt, wobei

$$J_{\mathrm{S}} = \frac{1}{12}\,m\left((7h)^2+h^2\right)$$

benutzt wurde.

Kontrolle des Ergebnisses mit Drallsatz:

$$J_{\mathrm{E}}\,\ddot{\varphi} = m\,g\,\frac{h}{2}\,\sin\varphi$$

Nach Multiplikation mit $\dot{\varphi}$ erhält man den Ausdruck

$$J_{\mathrm{E}}\,\ddot{\varphi}\,\dot{\varphi} = m\,g\,\frac{h}{2}\,\sin\varphi\dot{\varphi} \quad\Rightarrow\quad J_{\mathrm{E}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\varphi}^2\right) = -m\,g\,\frac{h}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\cos\varphi)\ ,$$

der sich unmittelbar integrieren lässt. Man bekommt

$$\frac{1}{2}\,J_{\mathrm{E}}\,\dot{\varphi}^2 = -m\,g\,\frac{h}{2}\,(\cos\varphi) + C$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich aus der Anfangsbedingung

$$\dot{\varphi}(\varphi=0) = 0$$

zu

$$C = m\,g\,\frac{h}{2}\,,$$

so dass sich wieder für die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{1}{2}\,J_{\mathrm{E}}\,\dot{\varphi}^2 = m\,g\,\frac{h}{2}\,(1-\cos\varphi)$$

ergibt.

b) Der Schwerpunktsatz in Normalenrichtung liefert eine Gleichung für die Normalkraft N

$$m\, a_{\mathrm{S}_n} = N - m\, g\, \cos\varphi \quad \text{mit} \quad a_{\mathrm{S}_n} = -\frac{h}{2}\, \dot{\varphi}^2$$

Es war hierfür nützlich $\dot{\varphi}$ bestimmt zu haben. Es ist also

$$N = m\, g \left(\cos\varphi - \frac{h^2}{2\, J_E}\, (1 - \cos\varphi) \right) = \frac{m\, g}{53}\, (59\, \cos\varphi - 12)\ .$$

Offensichtlich geht bei wachsendem φ die Normalkraft gegen Null. Dieser Wert ist errecht, falls

$$\cos\varphi_0 - \frac{h^2}{2\, J_E}\, (1 - \cos\varphi_0) = \left(\frac{59}{53}\, \cos\varphi_0 - \frac{12}{53} \right) = 0$$

Dies ergibt im vorliegenden Fall

$$\varphi_0 = \arccos\frac{12}{59}\ \approx\ 78^\circ$$

Bei diesem Winkel tritt ein Ablösen von der Tischecke ein.

Es ist aber zu bedenken, dass bevor dieser Winkel erreicht wird, sicherlich Rutschen einsetzt, da bei kleiner werdender Normalkraft der Haftreibungskoeffizient nicht mehr ausreichen wird die notwendige Reibkraft zu ermöglichen. Die Lösungsvoraussetzung Haften ist also schon vor diesem Winkel verletzt.

c) Die Reibkraft erhält man entweder aus dem Drallsatz um den Schwerpunkt oder aus dem Schwerpunktsatz. Der Drallsatz liefert

$$J_{\mathrm{S}}\, \ddot{\varphi} = R\, \frac{h}{2} \quad \text{mit} \quad \ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \frac{m\, g\, h}{2\, J_{\mathrm{E}}}\, \sin\varphi\, .$$

Es folgt

$$R = \frac{J_{\mathrm{S}}}{J_{\mathrm{E}}}\, m\, g\, \sin\varphi = \frac{50}{53}\, m\, g\, \sin\varphi\, .$$

d) Rutschbeginn bei $\varphi = \varphi_{\mathrm{R}}$: Es ist bei Haftreibung

$$|\vec{R}| \leq m_H\, N = R_{\max}\, .$$

Hier ergibt sich

$$|\vec{R}| = +R \leq \mu_H\, N\, .$$

Einsetzen obiger Ergebnisse ergibt

$$50\, \sin\varphi \leq \mu_H\, (59\, \cos\varphi - 12)\ .$$

Den Winkel φ_R erhält man daher aus der impliziten Gleichung

$$\sin\varphi_{\mathrm{R}} = \frac{\mu_H}{50}\, (59\, \cos\varphi_{\mathrm{R}} - 12)\ .$$

e) Der erforderliche Haftreibungskoeffizient errechnet sich aus

$$\mu_h \geq \frac{50 \sin\varphi}{59\, \cos\varphi - 12} = \mu_H, \min(\varphi)\, .$$

Hier ergibt sich

$$\mu_H, \min(\varphi) = \frac{50\, \sin(\pi/6)}{59\, \cos(\pi/6) - 12} \approx 0,64\, .$$