

Statik

Lösung Aufgabe 10a)

a) Definition eines Spannungsvektors in der Schnittfläche unter dem Winkel α :

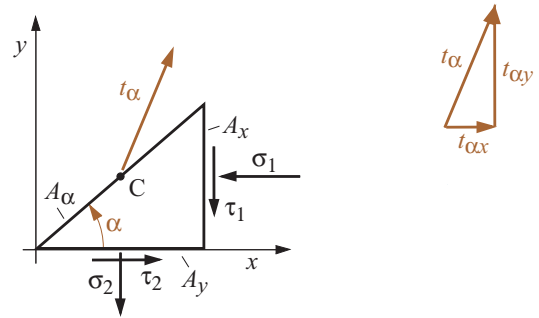
$$\sum F_x = 0 : \quad t_{\alpha x} A_\alpha + \tau_2 A_y - \sigma_1 A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \quad t_{\alpha y} A_\alpha - \tau_1 A_x - \sigma_2 A_y = 0$$

Mit $A_y = A_\alpha \cos \alpha$ und $A_x = A_\alpha \sin \alpha$ erhalten wir

$$t_{\alpha x} = \sigma_1 \sin \alpha - \tau_2 \cos \alpha$$

$$t_{\alpha y} = \sigma_2 \cos \alpha + \tau_1 \sin \alpha$$



Damit ist der durch den Belastungszustand mit σ_1, σ_2 und $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ hervorgerufenen Spannungsvektor \vec{t}_α in der Schnittfläche unter dem Winkel α berechnet:

$$\vec{t}_\alpha = \begin{pmatrix} t_{\alpha x} \\ t_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sin \alpha - \tau_2 \cos \alpha \\ \sigma_2 \cos \alpha + \tau_1 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Für die beiden Belastungsfälle mit $\sigma_1 = \sigma = 100 \text{ N/mm}^2, \tau = 1/2 \sigma = 50 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma_2 = \sigma = 100 \text{ N/mm}^2$ bzw. $\sigma_2 = \sigma/2 = 50 \text{ N/mm}^2$ ergeben sich

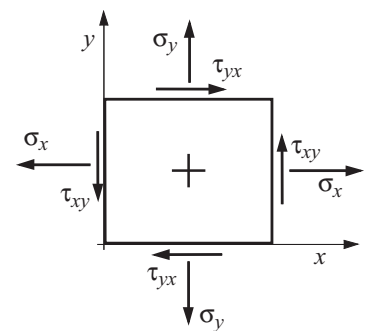
$$\vec{t}_\alpha = \begin{pmatrix} t_{\alpha x} \\ t_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \\ \sigma \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{\alpha x} \\ t_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,7 \\ 111,6 \end{pmatrix} \text{ N/mm}^2$$

bzw.

$$\vec{t}_\alpha = \begin{pmatrix} t_{\alpha x} \\ t_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \\ \frac{\sigma}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,7 \\ 68,3 \end{pmatrix} \text{ N/mm}^2$$

b) Für den Spannungstensor gilt die Vorzeichenkonvention der nebenstehenden Abbildung. Der Spannungstensors ist definiert durch:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$$



Vergleich mit den Angaben der Aufgabenstellung liefert:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & -\tau \\ -\tau & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

Die Zahlenwerte für die beiden Belastungsfälle sind:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} -100 & -50 \\ -50 & 100 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} -100 & -50 \\ -50 & 50 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

c) Für die gegebenen Belastungszustände können die Mohrschen Kreise gezeichnet werden. Für den Mittelpunkt M und Radius R eines Mohrschen Kreises gilt allgemein:

$$M = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hier ergibt sich:

$$M = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Dabei gilt folgende Zuordnung der Punkte auf dem Kreis zum Schnittwinkel α :

$$P(\alpha = 0) = (\sigma_2, -\tau_2), \quad P(\alpha = 90^\circ) = (-\sigma_1, \tau_1)$$

Für $\alpha = 30^\circ$ ergeben sich im symmetrischen ($\sigma_2 = \sigma_1$) bzw. im unsymmetrischen ($\sigma_2 = 1/2 \sigma_1$) zur τ -Achse angeordneten Kreis die in der Tabelle abgelesenen Zahlenwerte.

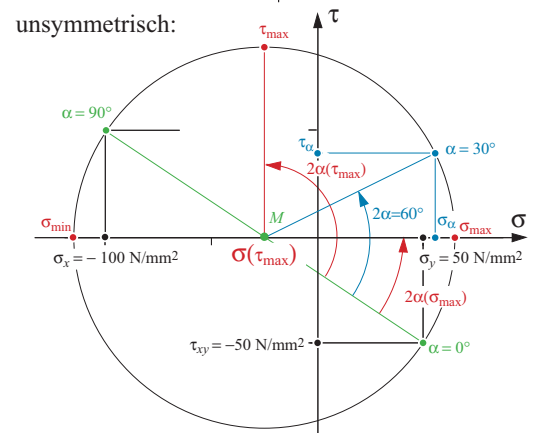
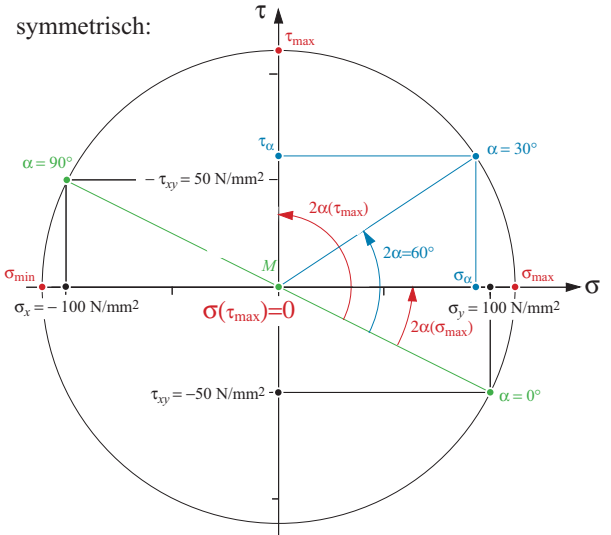
| | symm. | unsymm. |
|--------------------------------------|-------|---------|
| σ_α [N/mm ²] | 93 | 56,2 |
| τ_α [N/mm ²] | 62,8 | 40,5 |

Für die Hauptspannungen und die maximalen Schubspannungen sowie die dazugehörigen Winkel erhält man folgende Zahlenwerte:

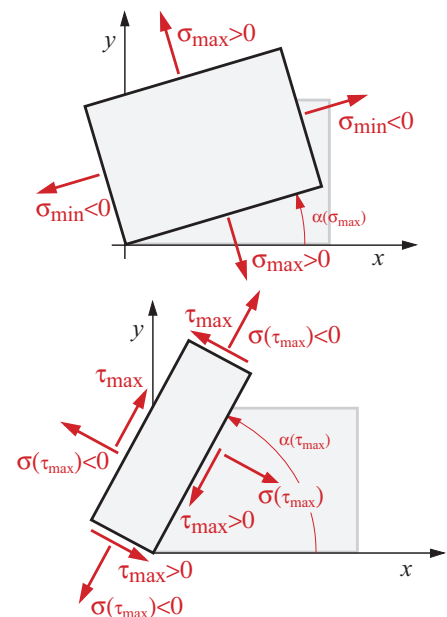
| | Einheit | symm. | unsymm. |
|-------------------------|----------------------|-------|---------|
| σ_α | [N/mm ²] | 93 | 56,2 |
| τ_α | [N/mm ²] | 62,8 | 40,5 |
| σ_{\max} | [N/mm ²] | 112 | 91,5 |
| $\alpha(\sigma_{\max})$ | [°] | 13 | 16,5 |
| σ_{\min} | [N/mm ²] | -112 | -116 |
| $\alpha(\sigma_{\min})$ | [°] | 103 | 106,5 |
| τ_{\max} | [N/mm ²] | 112 | 90 |
| $\alpha(\tau_{\max})$ | [°] | 58 | 61,5 |
| $\sigma(\tau_{\max})$ | [N/mm ²] | 0 | -26 |

Die zu den Hauptspannungen und den maximalen Schubspannungen gehörenden Richtungen im physikalischen Raum zeigt die letzte Abbildung für den Fall des unsymmetrischen Mohrschen Kreises. An den Schnittflächen mit Hauptspannungen sind niemals Schubspannungen anzutreffen.

Im Sonderfalle des zur τ -Achse symmetrischer Mohrschen Kreises verschwindet die Normalspannung



Lage der Schnittebenen für Hauptspannungen und max. Schubspannungen im unsymmetrischen Fall:



$\sigma(\tau_{\max})$. Dieser Belastungsfall wird reiner Schub genannt.