Thermodynamik II Aufgabe 1.0.4

A)

Es sei ein System gegeben, das durch die drei Zustandsgrößen Druck p, spezifisches Volumen v und Temperatur T beschrieben werden kann. Der Zustand des Systems und alle anderen spezifischen Zustandsgrößen seien eindeutig festgelegt, wenn je zwei dieser drei Größen als unabhängige Variablen gewählt werden. Die dritte Größe ergibt sich dann aus einer Zustandsgleichung.

Wenn man beispielsweise p und v als unabhängige Variablen wählt, so ist die Temperatur durch die thermische Zustandsgleichung $T = T(p, v)$ gegeben und die spezifische innere Energie durch eine Funktion $u(p, v)$. Das vollständige Differential der spezifischen inneren Energie lautet dann:

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_p \mathrm{d}v$$

Mit Hilfe des Ersten Hauptsatzes lässt sich ferner die spezifische Wärme δq, die vom System in einem infinitesimalen reversiblen Prozess absorbiert wird, stets als eine Differentialform in zwei unabhängigen Variablen x, y

$$\delta q = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$$

auffassen.

a) Drücken Sie die Koeffizienten a und b durch geeignete Zustandgrößen und ihre partiellen Ableitungen aus und zwar für die Fälle

$$(x\,;\,y) = (p\,;\,v), \quad (x\,;\,y) = (v\,;\,T) \quad \text{und} \quad (x\,;\,y) = (p\,;\,T)\,!$$

b) Zeigen Sie, dass die so erhaltenen Differentialformen δq keine vollständigen Differentiale sind!

c) Die spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen c_v und konstantem Druck c_p können definiert werden durch die Grenzübergänge

$$c_v = \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta T}\right)_v \quad \text{und} \quad c_p = \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta T}\right)_p .$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Resultate aus Teil a), dass

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v , \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p ,$$

wobei $h = u + pv$ die spezifische Enthalpie des Systems ist!

B)

Betrachten Sie ein einatomiges ideales Gas, für das die innere Energie U durch

$$U = \frac{3}{2} N \, k_\mathrm{B} \, T$$

gegeben ist, wobei T die thermodynamische Temperatur mit der Einheit Kelvin $[T] = \mathrm{K}$, k_B die Boltzmannkonstante mit $k_\mathrm{B} \approx 1{,}380\,65 \cdot 10^{-23}$ J/K und N die Anzahl der Teilchen im System sind.

a) Berechnen Sie die Arbeit

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} -p \, \mathrm{d}V \,,$$

die bei reversibler adiabatischer Expansion geleistet wird, wenn sich die Temperatur des Gases bei diesem Prozess von T_1 nach T_2 ändert. Adiabatisch bedeutet dabei, dass bei diesem Prozess keine Wärme ausgetauscht wird, also lt. Aufgabenteil A

$$\delta q \equiv 0 = a \, \mathrm{d}x + b \, \mathrm{d}y$$

oder bei konstanter Teilchenzahl im System entsprechend

$$\delta Q \equiv 0 = A \, \mathrm{d}X + B \, \mathrm{d}Y$$

gilt.

b) Wie lautet die thermische Zustandsgleichung des einatomigen idealen Gases $p(V, T)$ und wie bestimmt sich die allgemeine Gaskonstante aus der Boltzmannkonstanten?