Thermodynamik II Aufgabe 1.0.1

Thema: *Mathematische Grundlagen, partielle Ableitungen, vollständiges oder exaktes Differential*

A)

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial t}$ der Funktion

$$f(x, y(t), z(t)) = x^2\,\frac{\sin\left(x\,y(t)\right)}{z(t)}\,!$$

B)[1)]

a) Zeigen Sie, dass *jede* zweifach stetig differenzierbare komplexe Funktion $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, wobei i die imaginäre Einheit und $x, y \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind, Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta f = 0 \tag{1}$$

ist! Darin ist der Laplace-Operator definiert als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2}$$

b) Zeigen Sie mit der Zerlegung der Funktion $f(z)$ in Realteil und Imaginärteil

$$f(z) = \phi(x, y) + i\,\psi(x, y), \tag{3}$$

dass dann auch die reellen Funktionen $\phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ die Laplaceschen Differentialgleichungen

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\psi = 0$$

erfüllen!

c) Zeigen Sie, dass die durch (3) definierten Funktionen $\phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{4}$$

erfüllen!

[1)] Die nachfolgenden Zusammenhänge stammen aus der Funktionentheorie. Sie finden zum Beispiel Anwendung in der zweidimensionalen Potentialtheorie der Strömungslehre. Dort sind $\phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ Strömungspotential bzw. Stromfunktion einer ebenen Strömung, wobei sich der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ aus

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\[2ex] +\dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\[2ex] -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

errechnet. Aus (4) folgt, dass Kurven $\phi(x, y) = const$ und $\psi(x, y) = const$ stets senkrecht aufeinander stehen.

C)

a) Zeigen Sie, dass die Differentialform $\delta v = 3x^2y^2\,\mathrm{d}x + 2x^3y\,\mathrm{d}y$ ein vollständiges oder exaktes Differential darstellt! Nennen Sie zwei Beispiele aus der Thermodynamik!

b) Zeigen Sie, dass die Differentialform $\delta w = x\,\mathrm{d}y$ kein vollständiges Differential ist! Nennen Sie zwei Beispiele aus der Thermodynamik!

c) Sind die Ergebnisse der Kurvenintegrale

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \delta v \quad \text{bzw.} \quad \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \delta w$$

vom Weg in der Ebene $\vec{r}_1 = (x_1, y_1) \;\rightarrow\; \vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ abhängig oder nicht?
Diskutieren Sie Ihre Beispiel aus der Thermodynamik in diesem Zusammenhang!