

Thermodynamik II Aufgabe 1.01s

Thema: *Partielle Ableitungen, homogene Funktionen*

A)

Def.:

Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_k)$ heißt homogen vom Grade N , in den Koordinaten x_i , $i = 1, \dots, k$, wenn für beliebige Konstanten λ

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_k) = \lambda^N f(x_1, \dots, x_k)$$

gilt.

Satz:

Für eine homogene Funktion $f(x_1, \dots, x_k)$ vom Grad N gilt das Euler-Theorem:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_i} x_i = N f(x_1, \dots, x_k)$$

a) Beweisen Sie das Euler-Theorem!

Hinweis: Differenzieren Sie die Definition partiell nach λ und wählen Sie ein geeignetes λ , um die Aussage des Satzes zu erhalten.

b) In der Thermodynamik wird zwischen extensiven und intensiven Zustandsgrößen unterschieden. Worin besteht der Unterschied?

c) Betrachten Sie Gemische aus k -Komponenten mit Stoffmengen n_i , $i = 1, \dots, k$:

1. Begründen Sie, dass extensive Zustandsfunktionen $Z = Z(p, T, n_1, \dots, n_k)$ solcher Gemische homogen vom Grade $N = 1$ sind!
2. Wie lässt sich daher eine extensive Zustandsgröße bei konstantem p und T darstellen?
3. Begründen Sie, dass intensive Zustandsfunktionen $z = z(p, T, n_1, \dots, n_k)$ solcher Gemische vom Grade $N = 0$ sind!
4. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial z(p, T, n_1, \dots, n_k)}{\partial n_i} \right)_{p, T, n_j, j \neq i}$ der intensiven Zustandsfunktionen nicht unabhängig voneinander sind!
Welchen Zusammenhang zwischen diesen partiellen Ableitungen erhalten Sie?
5. Wenden Sie die Aussagen unter c) auf einfache selbstgewählte Beispiele an!

B)

Gegeben sind die Definitionen einiger thermodynamischer Potentiale und ihre Fundamentalgleichungen:

$$\text{Spez. Innere Energie} \quad u \quad \text{mit} \quad du = Tds - pdv$$

$$\text{Spez. Enthalpie} \quad h = u + pv \quad \text{mit} \quad dh = Tds + vdp$$

$$\text{Spez. Freie Innere Energie (Helmholtz-Energie)} \quad a = u - Ts \quad \text{mit} \quad da = -sdT - pdv$$

$$\text{Spez. Freie Enthalpie oder (Gibbs-Enthalpie)} \quad g = h - Ts \quad \text{mit} \quad dg = -sdT + vdp$$

a) Wählen Sie passende sog. natürliche Variablen für die obigen vier thermodynamischen Potentiale, um ihre totalen Differentiale zu formulieren und um Aussagen für die Temperatur T , den Druck p , das spezifische Volumen v und die spezifische Entropie s zu formulieren.

b) Beweisen Sie damit die Maxwell-Relationen

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

c) Was folgt daraus, wenn Sie im Rahmen einer Modellbildung eine Zustandsgleichung für ein thermodynamisches Potential beispielsweise für die spezifische Gibbs-Enthalpie

$$g = g(p, T)$$

in geschlossener Form explizit angeben!