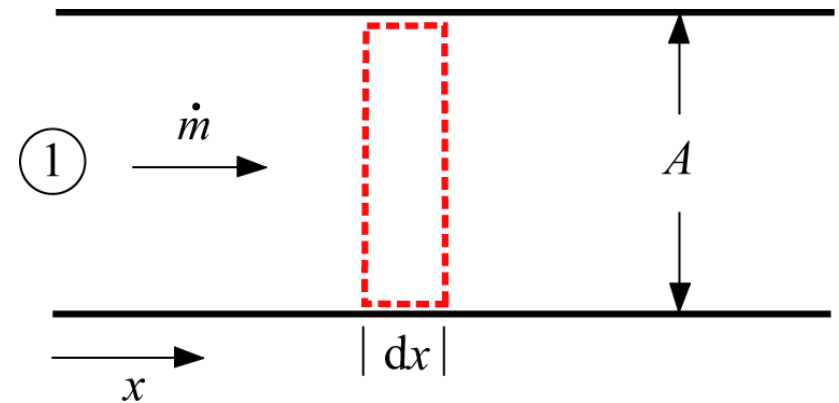


4.1.4 Stationäre kompressible Strömungen in Rohren oder Kanälen konstanten Querschnitts

Die Strömung tritt mit dem Zustand 1 in die Rohrleitung ein.

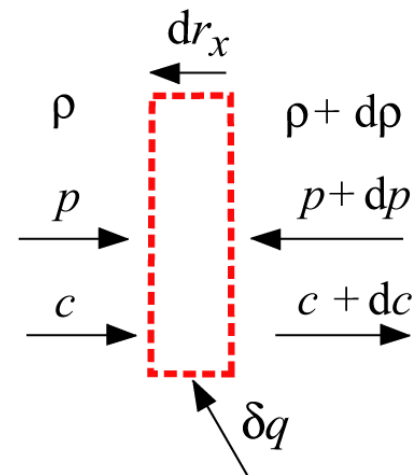


Für ein aus der Rohrstrecke herausgeschnittenes Element gilt:

Massenbilanz: $d(\rho c) = 0$

Impulsbilanz: $d(\rho c^2 + p + r_x) = 0$

Energiebilanz: $\delta q = d\left(h + \frac{c^2}{2}\right)$



4.1.4.1 Thermodynamik der stationären, adiabaten Strömung mit Reibung in Rohren konstanten Querschnitts

Wir wollen zunächst alle Zustände des Gases innerhalb der Rohrleitung bestimmen, die die **Massenbilanz** und die **Energiebilanz** erfüllen.

Die Impulsbilanz enthält die unbekannte Reibkraft und bleibt deshalb außer Acht.

Die Integrale von Massen- und Energiebilanz liefern:

$$\rho c = \text{const} = \rho_1 c_1 = \dot{m}/A \quad \text{und} \quad h + \frac{c^2}{2} = \text{const} = h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_0$$

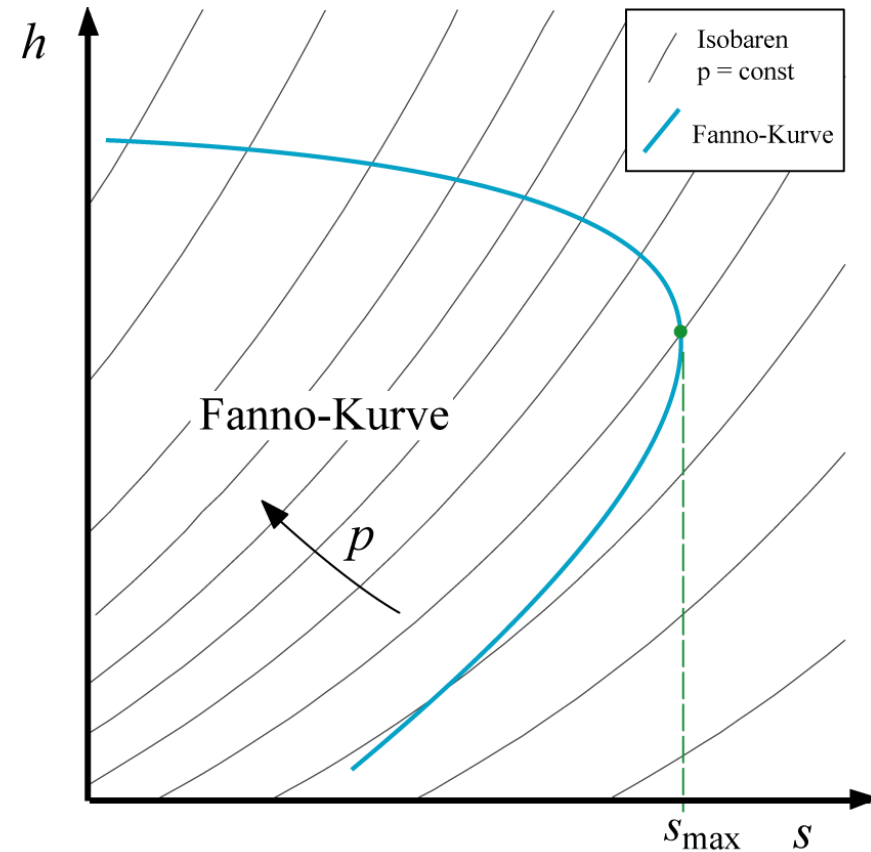
Setzt man die Massenbilanz in die Energiebilanz ein, so folgt mit dem spezifischen Volumen $v = 1/\rho$:

$$h + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{m}}{A} \right)^2 v^2 = h_0$$

Das bedeutet: Zu jedem Wert des spezifischen Volumens, der sich innerhalb der Rohrstrecke einstellt, gehört in Abhängigkeit der vorgegebenen Massenstromdichte und des Einström- oder Ruhezustands eine bestimmte Enthalpie.

Sind spezifisches Volumen und Enthalpie des Gases bekannt, so sind auch alle anderen Zustandsgrößen angebar wie z.B. die Entropie $s=s(v,h)$. Entweder aus Tabellen oder aus theoretischen Zustandsgleichungen des Fluids.

Speziell im h,s -Diagramm ergibt sich eine Kurve, die **Fanno-Kurve**.



(Qualitative Dargestellung für ideale Gase)

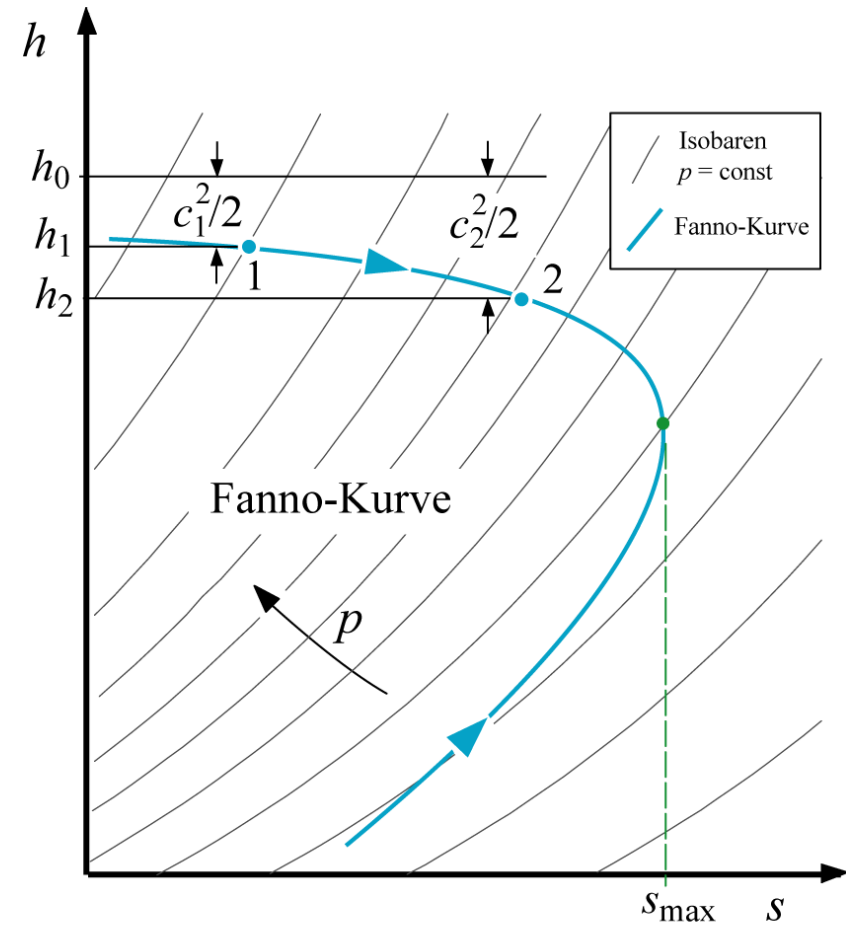
Über die Lauflänge im Rohr nimmt wegen der Reibung die Entropie stets zu.

Kleine Eintrittsgeschwindigkeiten (oberer Kurvenast):

- Geschwindigkeit nimmt mit wachsender Entropie zu.

Große Eintrittsgeschwindigkeiten (unterer Kurvenast):

- Geschwindigkeit nimmt mit wachsender Entropie ab.

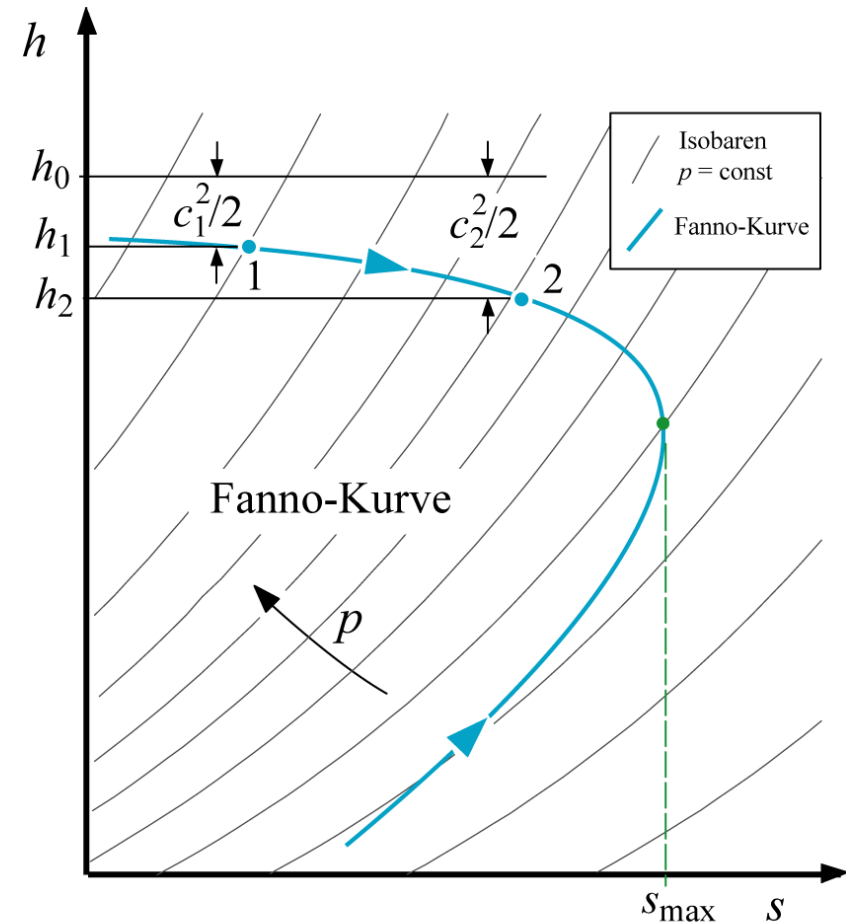


Die Kurve sagt nichts darüber aus, nach welcher Rohrleitungslänge ein bestimmter Zustand 2 angetroffen wird.

Die Länge hängt von der Entropieproduktion ds/dx in der Strömung ab, also von der Größe des Reibungsbeitrags.

Kenntnis der Reibungskraft $r_x(x)$ nötig!

Eine Integration der Impulsgleichung liefert dann den gesuchten Zusammenhang zwischen der Rohrlänge und der Zustandsänderung.



Startet die Strömung im Zustand 1 auf dem oberen Ast, erreicht die Entropie irgendwann ein Maximum.

Nach dem Zweiten Hauptsatz kann der untere Ast nicht erreicht werden!

Der Druck im Rohr kann nicht unter den Druck des begrenzenden Punktes im Zustand maximaler Entropie reduziert werden, gleichgültig, wie niedrig der Druck in der Umgebung hinter dem Rohraustritt eingestellt wird ← **Choking**.

Entsprechend ist die maximale Geschwindigkeit am Rohrende vorgegeben.

Soll ein niedrigerer Druck am Rohrende auftreten, muss eine andere nämlich kleinere Massenstromdichte im Rohr eingestellt werden.

Eine passende, nach rechts verschobene aufgeblähte Fanno-Kurve stellt sich ein.

Analoge Aussagen gelten für den unteren Ast des überschallschnellen Durchströmens des Rohres.

Begrenzende Geschwindigkeit der Fanno-Kurve

Es gilt allgemein: $T ds = dh - v dp$

Für die Fanno-Kurve: $dh + \left(\frac{\dot{m}}{A}\right)^2 v dv = 0$

Bedingung am begrenzenden Punkt: $ds = 0$

Dies liefert: $v dp + \left(\frac{\dot{m}}{A}\right)^2 v dv = 0, s = const$

Mit der Massenbilanz $\dot{m}/A = c/v$ folgt: $c^2 = \frac{dp}{d\rho}\Big|_{s=const} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = a^2$

Der Punkt der maximalen Entropie zeichnet sich dadurch aus, dass das Gas hier gerade die Schallgeschwindigkeit erreicht, $Ma = 1$.

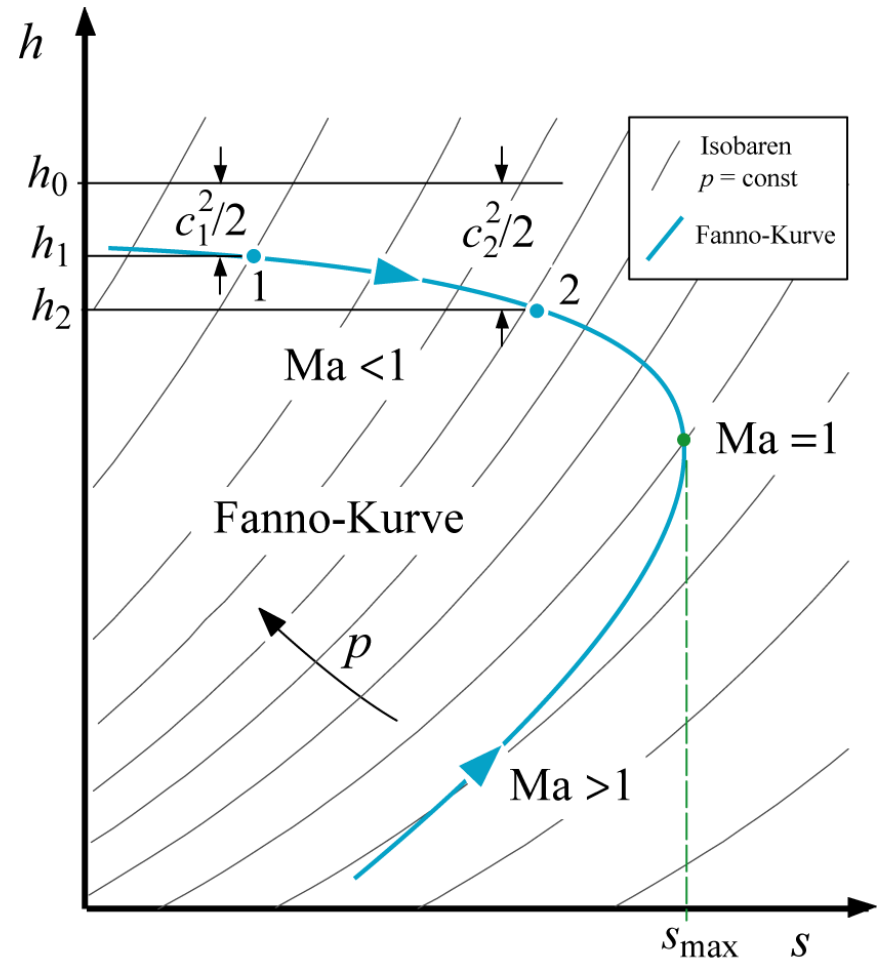
Es folgt daher:

oberer Ast:

alle Unterschallzustände mit $Ma < 1$,

unterer Ast:

alle Überschallzustände mit $Ma > 1$.



Beispiel: Kritische Rohrlänge einer adiabaten Rohrströmung

$$dr_x = \frac{\rho c^2}{2} \frac{4f dx}{\mathcal{D}}$$

Darin sind f der Reibkoeffizient und \mathcal{D} der hydraulische Durchmesser mit $\mathcal{D} = 4A/U$ (vgl. 4.1-4). Die Impulsgleichung lautet:

$$dp + \rho c dc + dr_x = dp + \rho c dc + \frac{\rho c^2}{2} \frac{4f dx}{\mathcal{D}} = 0$$

Da wir wissen, dass sich bei der kritischen Rohrlänge der Schallzustand einstellt, ist es zweckmäßig im Impulssatz alle Terme als Funktion der Machzahl Ma und der Änderung der Machzahl dMa auszudrücken und dann die Integration über x durchzuführen.

Ziel ist also die Ableitung einer Differentialgleichung der Form:

$$\frac{4f dx}{\mathcal{D}} = f_{kt}(\kappa, Ma) dMa$$

Die Impulsgleichung lässt sich mit $\kappa \frac{p}{\rho} = a^2$

umschreiben:

$$\frac{dp}{p} + \kappa \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} + \kappa \frac{\text{Ma}^2}{2} \frac{4f dx}{\mathcal{D}} = 0 \quad (1)$$

Als weitere Gleichungen stehen zur Verfügung:

Kontinuitätsgleichung
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0 \quad (2)$$

Energiegleichung
$$c_p dT + c dc = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R dT + c dc = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\kappa - 1} \frac{dT}{T} + \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} = 0 \quad (3)$$

Zustandsgleichung
$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (4)$$

und aus der Definitionsgleichung der Machzahl und der Schallgeschwindigkeit

$$\text{Ma} = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{\kappa R T}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} = \frac{dc}{c} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad (5)$$

$$\frac{dp}{p} + \kappa \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} + \kappa \frac{\text{Ma}^2}{2} \frac{4f dx}{\mathcal{D}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\kappa - 1} \frac{dT}{T} + \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (4)$$

$$\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} - \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad (5)$$

1. Eliminieren von dp/ρ mittels Gleichung (2):

$$\frac{dp}{p} + \kappa \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} + \kappa \frac{\text{Ma}^2}{2} \frac{4f dx}{\mathcal{D}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\kappa - 1} \frac{dT}{T} + \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dc}{c} - \frac{dT}{T} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} - \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dp}{p} + \kappa \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} + \kappa \frac{\text{Ma}^2}{2} \frac{4f dx}{\mathcal{D}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\kappa - 1} \frac{dT}{T} + \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dc}{c} - \frac{dT}{T} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} - \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad (5)$$

2. Eliminieren von dp/p mittels Gleichung (4):

$$\frac{dT}{T} - \frac{dc}{c} (1 - \kappa \text{Ma}^2) + \kappa \frac{\text{Ma}^2}{2} \frac{4f dx}{\mathcal{D}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\kappa - 1} \frac{dT}{T} + \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} - \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dT}{T} - \frac{dc}{c}(1 - \kappa \text{Ma}^2) + \kappa \frac{\text{Ma}^2}{2} \frac{4f dx}{D} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\kappa - 1} \frac{dT}{T} + \text{Ma}^2 \frac{dc}{c} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} - \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} = 0 \quad (5)$$

3. Eliminieren von dc/c mittels Gleichung (3):

$$\frac{dT}{T} \left(1 + \frac{1 - \kappa \text{Ma}^2}{(\kappa - 1) \text{Ma}^2} \right) + \kappa \frac{\text{Ma}^2}{2} \frac{4f dx}{D} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} + \frac{dT}{T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa - 1) \text{Ma}^2} \right) = 0 \quad (5)$$

Gleichungssystem:

$$\frac{dT}{T} \left(1 + \frac{1 - \kappa \text{Ma}^2}{(\kappa - 1) \text{Ma}^2} \right) + \kappa \frac{\text{Ma}^2}{2} \frac{4f dx}{D} = 0 \quad (1) \quad \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} + \frac{dT}{T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa - 1) \text{Ma}^2} \right) = 0 \quad (5)$$

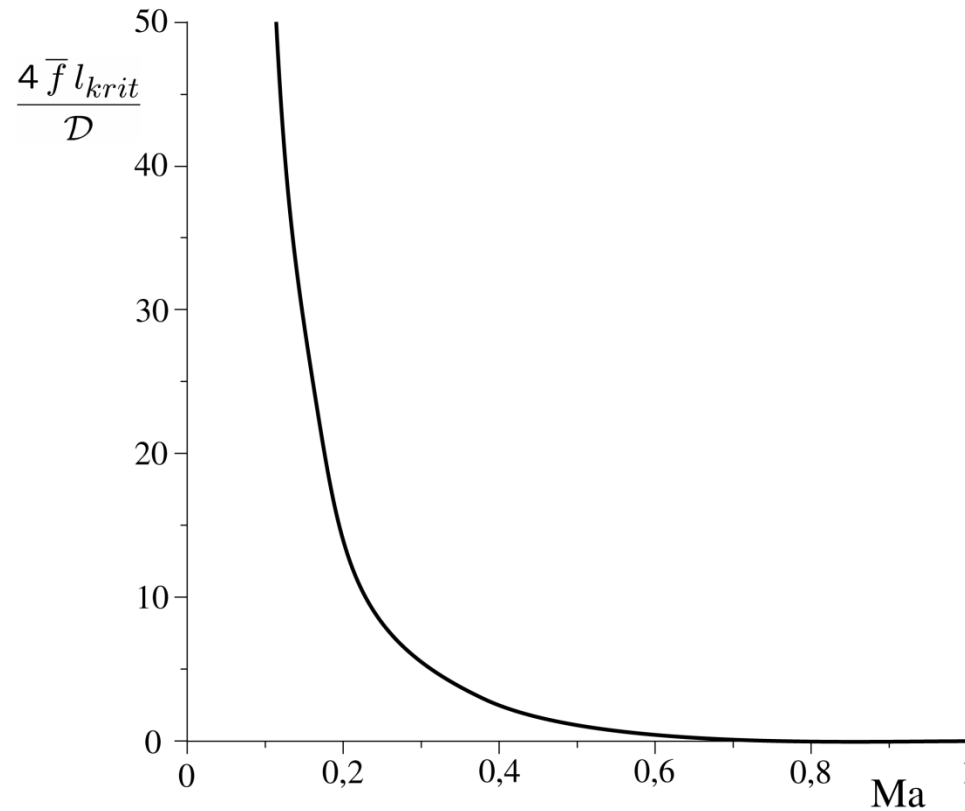
4. Eliminieren von dT/T mittels Gleichung (5):

$$\frac{4f dx}{D} = \frac{2(1 - \text{Ma}^2)}{\kappa \text{Ma}^2 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2 \right)} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}}$$

Integration liefert mit einem mittleren Reibbeiwert \bar{f} :

$$\frac{4 \bar{f} l_{krit}}{D} = \int_{\text{Ma}(x=0)}^{\text{Ma}=1} \frac{2(1 - \text{Ma}^2)}{\kappa \text{Ma}^3 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2 \right)} d\text{Ma} = \left[-\frac{1}{\kappa \text{Ma}^2} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\text{Ma}^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2} \right) \right]_{\text{Ma}(x=0)}^{\text{Ma}=1}$$

$$\frac{4 \bar{f} l_{krit}}{D} = \frac{1 - \text{Ma}^2}{\kappa \text{Ma}^2} + \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\frac{\kappa + 1}{2} \text{Ma}^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2} \right)$$



Um von $Ma = 0,5$ auf $Ma = 1$ zu beschleunigen, liefert der dimensionslose Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung den Zahlenwert 1,0691.

Für den mittleren Reibbeiwert sei 0,005 angenommen. Bei einem Rohrdurchmesser von 0,1 m ergibt sich dann für die kritische Rohrlänge:

$$l_{krit} = \frac{0,1}{4 \cdot 0,005} 1,0691 \text{ m} \approx 5,35 \text{ m}$$

Für kleinere Machzahlen nimmt diese Länge sehr stark zu, wie die Grafik zeigt.

4.1.4.2 Dynamik der stationären, reibungsfreien Strömung mit Wärmezufuhr in Rohren konstanten Querschnitts

Da jetzt die zugeführte Wärme unbestimmt ist, untersuchen wir die Bedingungen, die die **Massen-** und die **Impulsbilanz** an die Strömung stellen.

Mit $\dot{m}/A = const$ folgt aus der Impulsbilanz:

$$dp + \frac{\dot{m}}{A}dc = 0 \quad \text{oder} \quad p + \frac{\dot{m}}{A}c = const = \frac{F_S}{A}$$

Die Konstante ist der durch die Strömung erzeugte Schub pro Fläche.

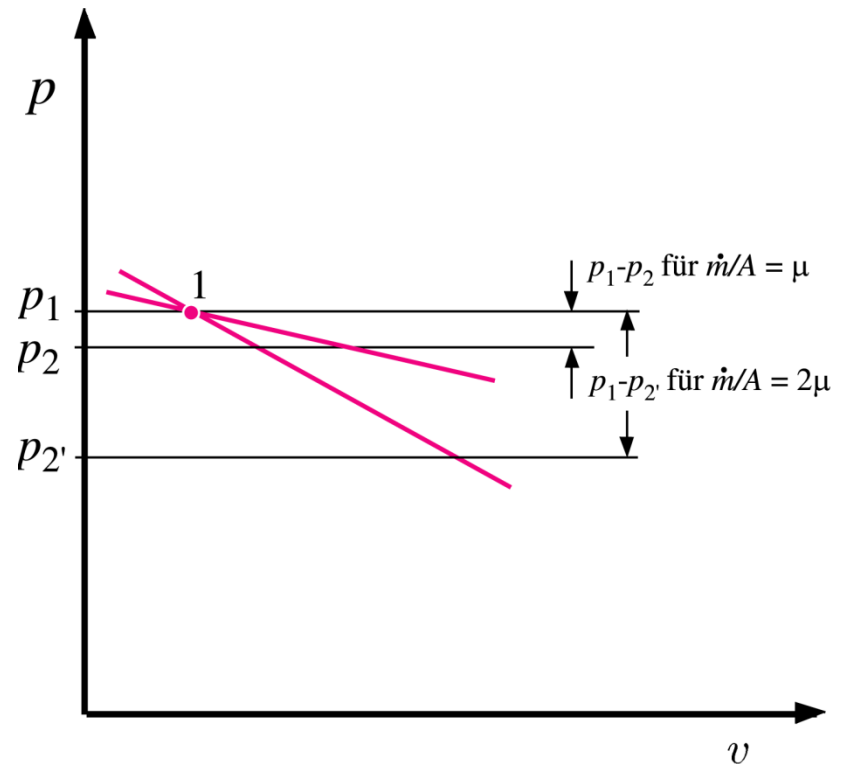
Ersetzt man die Geschwindigkeit aus der Massenbilanz, so folgt:

$$p + \left(\frac{\dot{m}}{A}\right)^2 v = \text{const}$$

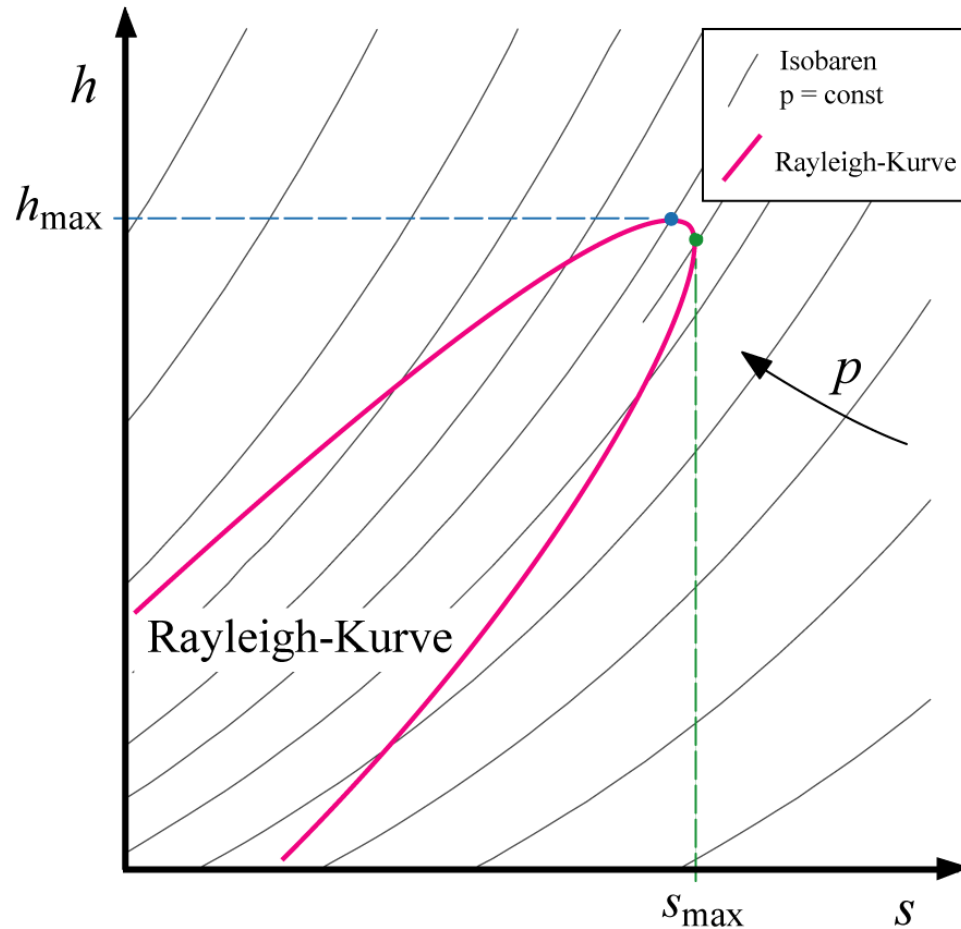
Gegebenen Massenstrom vorausgesetzt, liefert jeder Wert des spezifischen Volumens einen bestimmten Druck. Die dadurch definierte Kurve heißt Rayleigh-Kurve.

Trägt man den funktionalen Zusammenhang im p, v -Diagramm auf, so erhält man offensichtlich einfache Geraden mit negativer Steigung.

Die Steigung der Geraden wird durch die Größe der Massenstromdichte festgelegt.

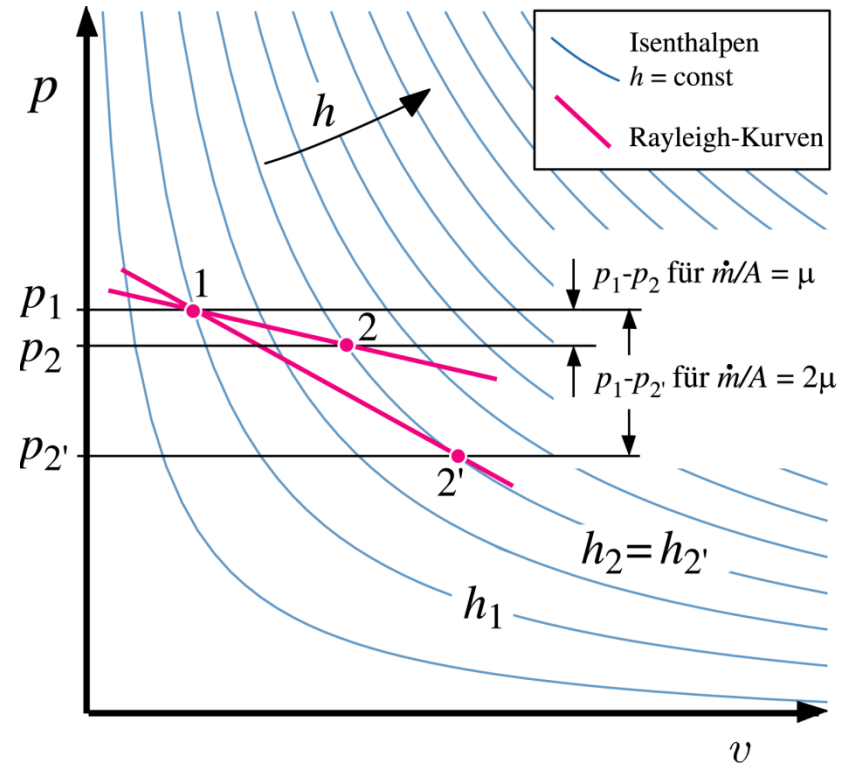


Rayleigh-Kurve qualitativ für ideale Gase im h,s -Diagramm:



Die Grenzpunkte h_{\max} und s_{\max} werden im folgenden diskutiert.

Trägt man Linien konstanter Enthalpie in das p, v -Diagramm ein, so erkennt man, dass ausgehend vom Zustand 1 eine Erhöhung der Enthalpie durch Heizen der Rohrstrecke mit abnehmendem Druck und zunehmendem spezifischen Volumen einhergeht.



Der Zustand des Gases erreicht dann je nach Massenstrom die Zustandspunkte 2 bzw. 2'.

Die Rayleigh-Kurve tangiert eine Linie konstanter Enthalpie.

Weiteres Heizen kann offenbar die Enthalpie der Strömung nicht weiter erhöhen.

Stattdessen führt die Wärmezufuhr sogar zu einer Abnahme der Enthalpie.

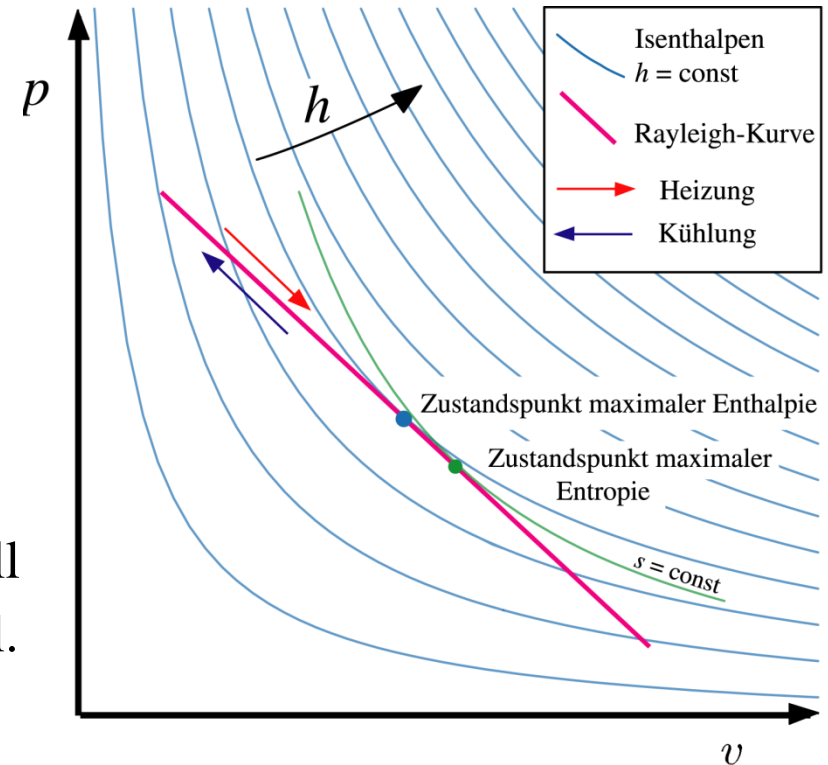
Da die Massenstromdichte proportional zur Wurzel aus der negativen Steigung der Rayleigh-Kurve ist,

$$\rho c = \sqrt{-\frac{\Delta p}{\Delta v}}$$

führt der durch Heizen erzwungene Druckabfall zu einer Erhöhung der kinetischen Energie (vgl. h,s -Diagramm 4.4-17).

Diese Zusammenhänge gelten bis der Punkt maximaler Entropie erreicht wird.

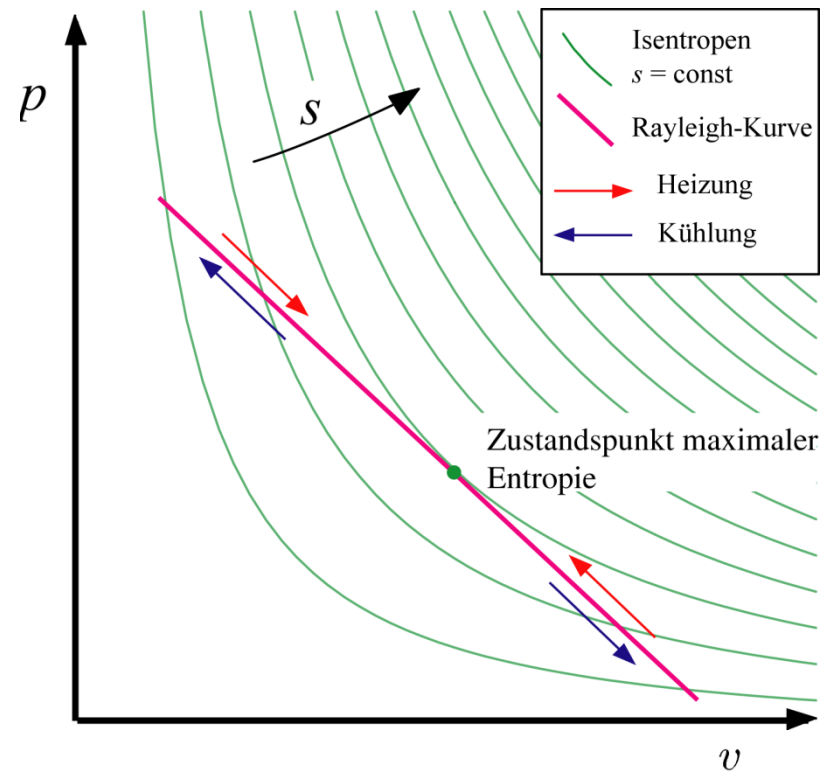
Analoge Aussagen gelten für Kühlung.



Im nebenstehenden Diagramm sind nun statt der Isenthalpen die Isentropen eingezeichnet. Letztere verlaufen stets steiler als die Isenthalpe, da der Isentropenexponent stets größer als eins ist.

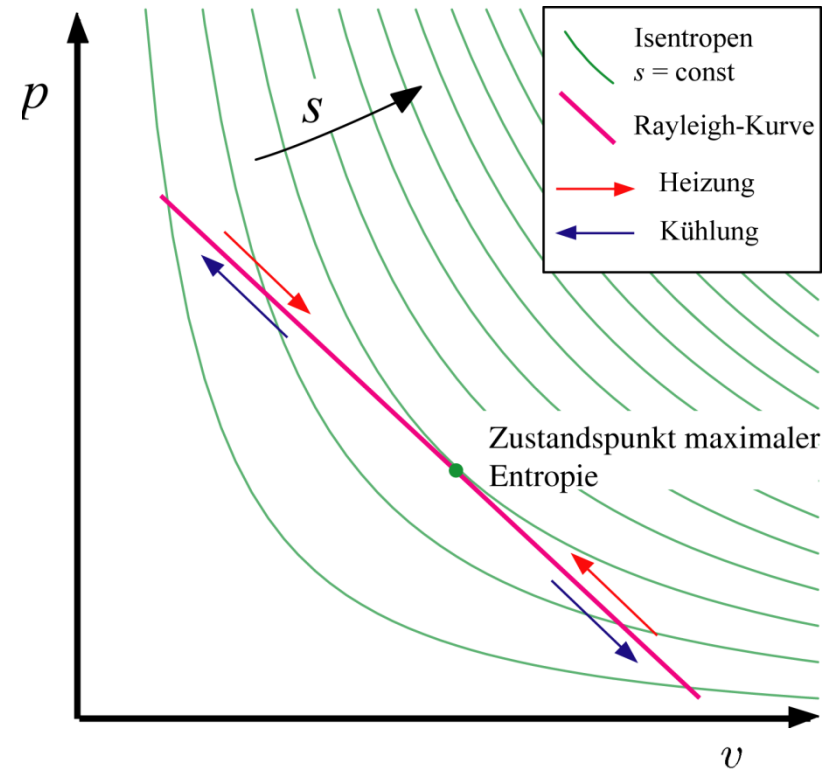
Die Rayleigh-Kurve tangiert zwangsläufig eine Isentrope.

Durch Heizen der Rohrstrecke (Entropiezunahme) wird stets ein Punkt maximaler Entropie erreicht, der nach dem zweiten Hauptsatz nicht überschritten werden kann.



Wie bei der Diskussion der reibungsbehafteten Strömung, muss sich in der geheizten Rohrstrecke der Massenstrom anpassen (**Choking**), wenn der Strömung mehr Wärme zugeführt werden soll.

Je nach dem Zustand am Rohreintritt wandert man entweder in Richtung einer Druckabnahme (oberer Kurvenabschnitt) oder in Richtung einer Druckzunahme (unterer Kurvenabschnitt).



Bedingung maximaler Entropie

Nach dem vorher Gesagten gilt für den Punkt maximaler Entropie, dass die Steigung der Rayleigh-Kurve R mit der Steigung der Isentropen übereinstimmt.

Steigung der Isentropen:
$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = -\frac{a^2}{v^2}$$

Steigung der Rayleigh-Kurve R:
$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_R = -\left(\frac{\dot{m}}{A}\right)^2 = -\frac{c^2}{v^2}$$

Der Vergleich zeigt, dass am Punkt maximaler Entropie die lokale Machzahl gerade wieder den Wert eins annimmt, da an diesem Punkt Strömungsgeschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit übereinstimmen:

$$\Rightarrow c = a \quad \text{bzw.} \quad \text{Ma} = 1 \quad \text{für maximale Entropie}$$

Der Punkt der maximalen Entropie zeichnet sich dadurch aus, dass das Gas hier gerade die Schallgeschwindigkeit erreicht, $Ma = 1$.

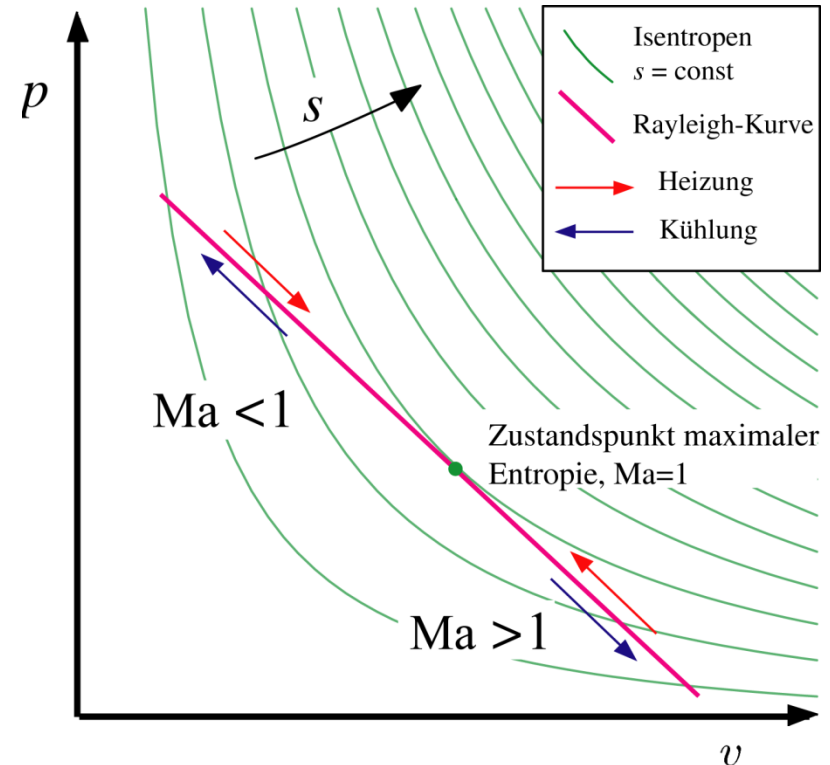
Es folgt daher:

oberer Ast:

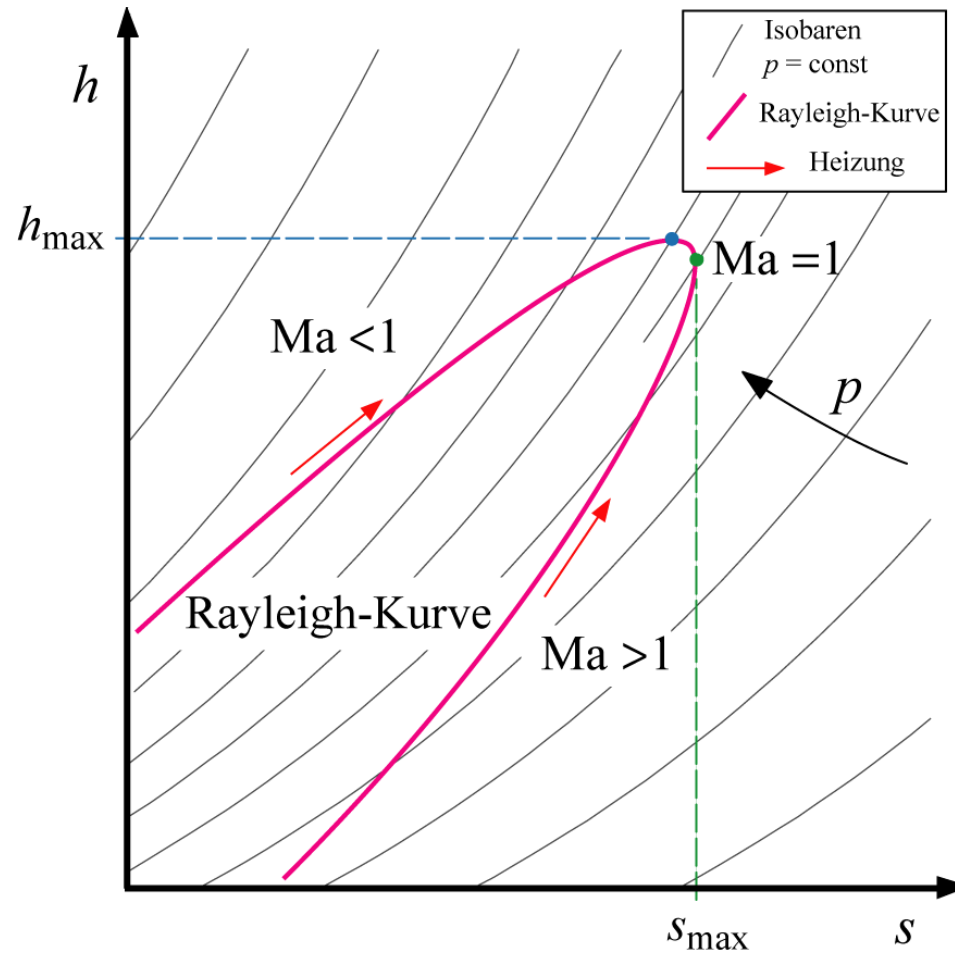
alle Unterschallzustände mit $Ma < 1$,

unterer Ast:

alle Überschallzustände mit $Ma > 1$.



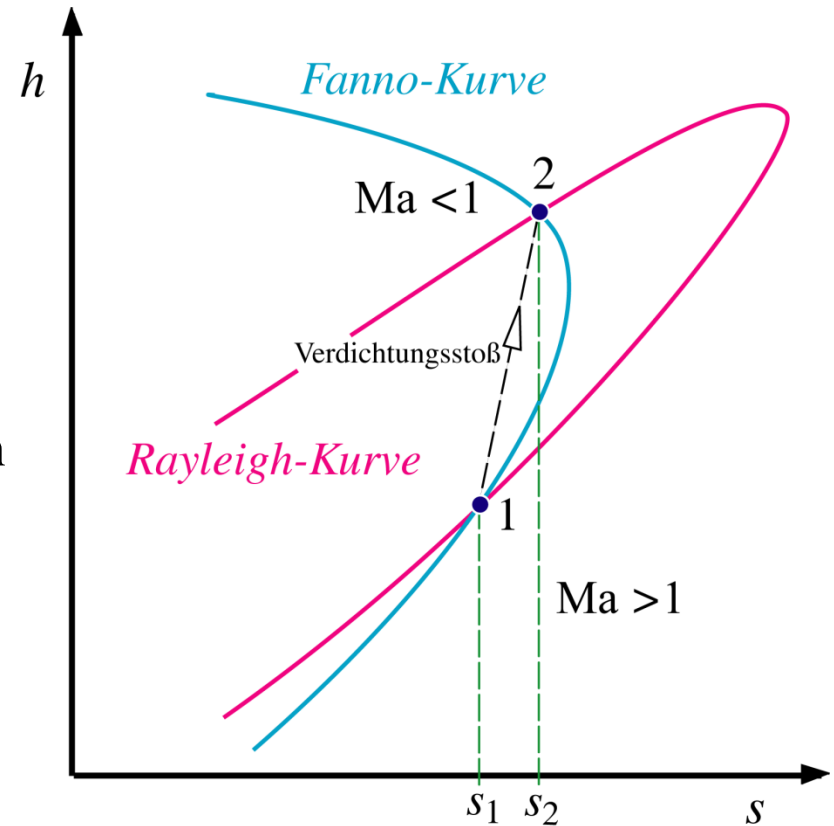
Damit kann auch die Rayleigh-Kurve im h,s -Diagramm vervollständigt werden.



4.1.4.3 Rohrströmung konstanten Querschnitts ohne Reibung und Wärmezufuhr

Werden die Fanno- und die Rayleigh-Kurve für die gleiche Massenstromdichte gemeinsam in ein h,s -Diagramm eingezeichnet, so schneiden sich die Kurven in zwei Zustandspunkten 1 und 2.

Die Punkte 1 und 2 haben daher dieselben Werte für \dot{m}/A , h_0 und F_S/A , d.h. in der reibungsfreien und adiabaten Strömung können beide Zustandspunkte gleichberechtigt auftreten.



Der zweite Hauptsatz verbietet eine Abnahme der Entropie bei der Zustandsänderung.

Der Übergang vom Zustand 1 in den Zustand 2 ist zulässig, nicht umgekehrt.

Der Zustand 1 ist dabei immer ein Überschallzustand, der Zustand 2 ein Unterschallzustand.

Diese Zustandsänderung ist genau jene bei einem Verdichtungsstoß der Stärke der Machzahl Ma_1 .

Ein Verdichtungsstoß tritt also nur in Überschallströmungen auf.

