# Inhalt von Abschnitt 4.2

**4.2. Stationäre, eindimensionale, inkompressible Strömungen mit freier Oberfläche in einem Schwerefeld**

**4.2.0 Einleitende Bemerkungen**

**4.2.1 Stationäre Bilanzgleichungen**

**4.2.1.1 Stationäre Massenbilanz**

**4.2.1.2 Stationäre Entropiebilanz**

**4.2.1.3 Stationäre Energiebilanz**

**4.2.1.4 Stationäre Impulsbilanz**

**4.2.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit von Flachwasserwellen**

# 4.2 Eindimensionale, inkompressible Strömungen mit freier Oberfläche in einem Schwerefeld

## 4.2.0 Einleitende Bemerkungen

Solche Strömungen werden kurz als Strömungen in offenen Gerinnen oder kurz Gerinneströmungen bezeichnet.

Definition:

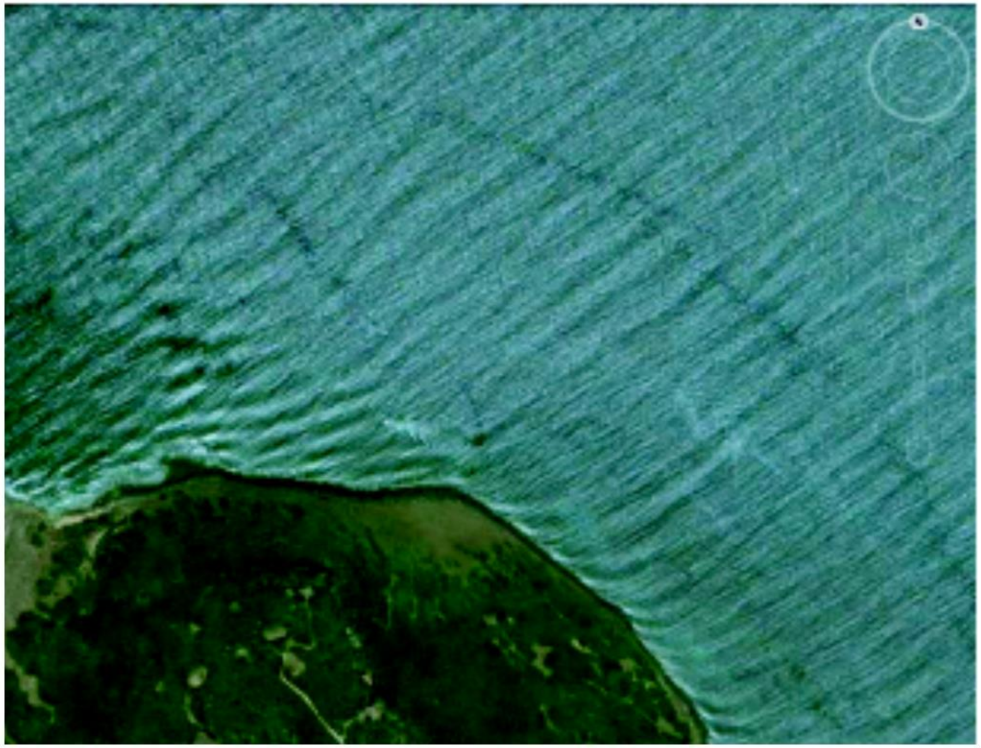
Gerinneströmungen sind Strömungen, bei denen ein dichtes Fluid getrennt von einem darüberliegenden leichteren Fluid unter dem Einfluss von Schwerkraft in einem offenen Querschnitt fließt.

Dazu gehören vor allem natürliche und kanalisierte Fließgewässer.

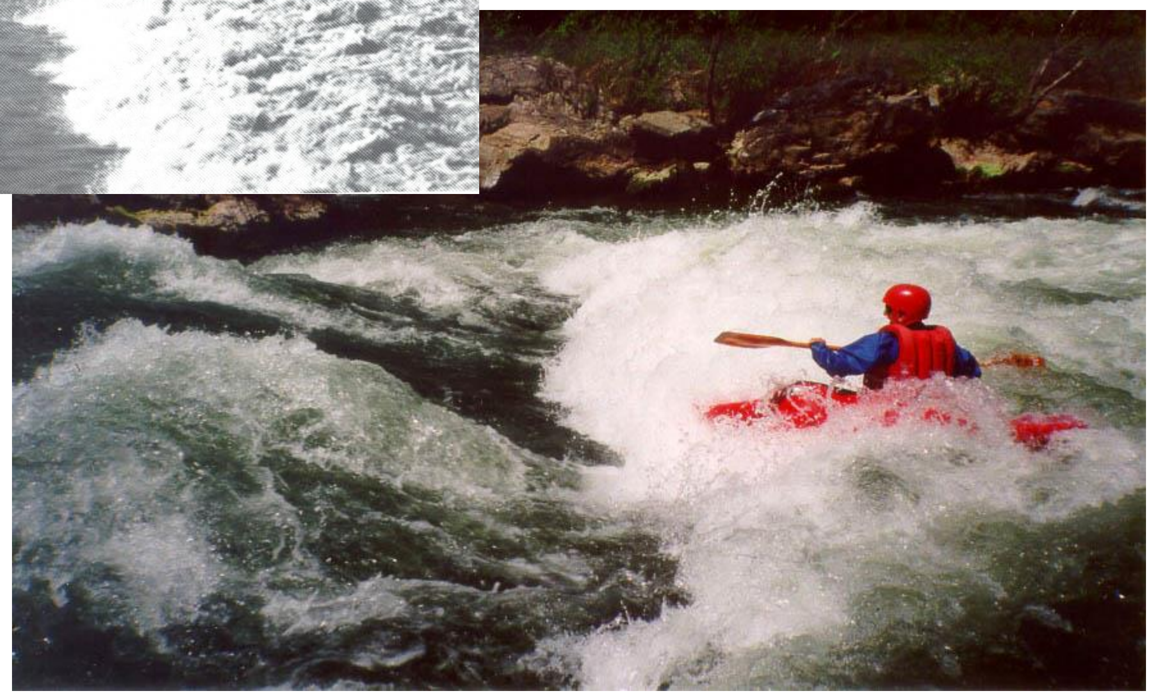
Die Fachbereiche Geohydraulik und Ingenieurhydrologie sind hier besonders angesprochen, aber auch das Bauingenieurwesen bei Abwasseranlagen und die Verfahrenstechnik bei Gießvorgängen.

Sie sind zum Beispiel wichtig, um die Ausbreitung von Hochwassern in Flusssystemen zu verstehen.

Beipiele: Beugung von Flachwasserwellen durch Änderung der Wassertiefe



# Beipiele: Wasser- oder Wechselsprünge (engl. hydraulic jumps)



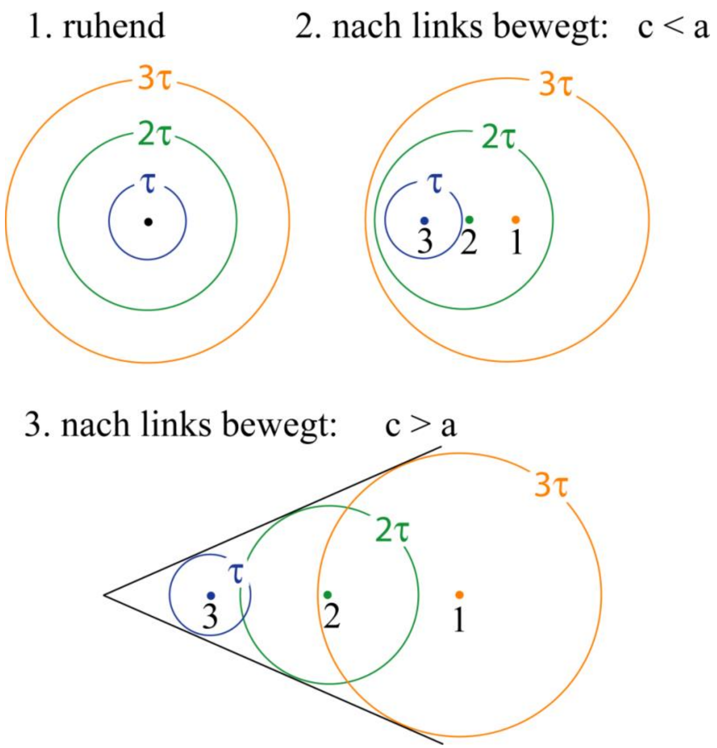
Es besteht eine Analogie zwischen Gerinneströmungen und den kompressiblen Strömungen in geschlossenen Kanälen mit veränderlichem Querschnitt (insb. den Lavaldüsen), weshalb Gerinneströmungen hier mit aufgenommen wurden.

Dies soll bereits hier andeutungsweise an einem Beispiel verdeutlicht werden:

Ein Charakteristikum von Strömungen mit freien Oberflächen im Schwerefeld ist, dass sich (schwache) Oberflächenwellen mit charakteristischer Geschwindigkeit *a* ausbreiten.

Je nachdem ob sich die Störquelle, die zur Oberflächenwelle führt, mit $c = 0$, $c < a$ oder $c > a$ im Wasser ausbreitet, ergibt sich ein charakteristisches Wellenbild, das demjenigen bei Schallwellen in kompressiblen Medien entspricht.

Vergleichbares Verhalten von Schallwellen



Die folgende Darstellung weicht von der Einführung der Gerinneströmungen in Fachbüchern der Strömungslehre ab, da der Zugang hier aus der Sicht der Thermodynamik erfolgen soll.

Annahmen:

- Es soll grundsätzlich von turbulenten Strömungsvorgängen abgesehen werden.
- Ferner soll ein Schwerpunkt auf stark ungleichförmige Strömungen im Bereich kurzer Distanzen gelegt werden.

Daraus ergibt sich, dass kontinuierliche Verluste durch innere Reibung und Reibung an Kanalwänden vernachlässigt werden können.

Grundsätzliche vereinfachte Annahmen der vorliegenden Theorie

- Keine kontinuierlichen Verluste, das heißt Vernachlässigung der Reibung mit der Umgebung.

- Die grundlegenden physikalischen Größen Strömungsgeschwindigkeit $c$, Innere Energie $u$ und Temperatur $T$ sollen nur in Strömungsrichtung variieren $\leftarrow$ eindimensionale Theorie.

- Wesentlich ist, dass der Druck an der Oberfläche konstant und vorgegeben ist und mit der Tiefe in bekannter Weise variiert . Vereinfachend wird die Sohlkrümmung vernachlässigt, so dass der Druck der hydrostatischen Beziehung folgen soll $\Rightarrow$ Druck und Enthalpie proportional zur Wassertiefe.

Die Besonderheit der Zustandsgleichungen inkompressibler Fluide legt es nahe, die Bilanzgleichungen für Masse Impuls, Energie und Entropie in besonderer Reihenfolge zu betrachten.

Die Bilanzgleichung für die Entropie wird gegenüber der Energie- und Impulsbilanz vorgezogen.

Bem.:

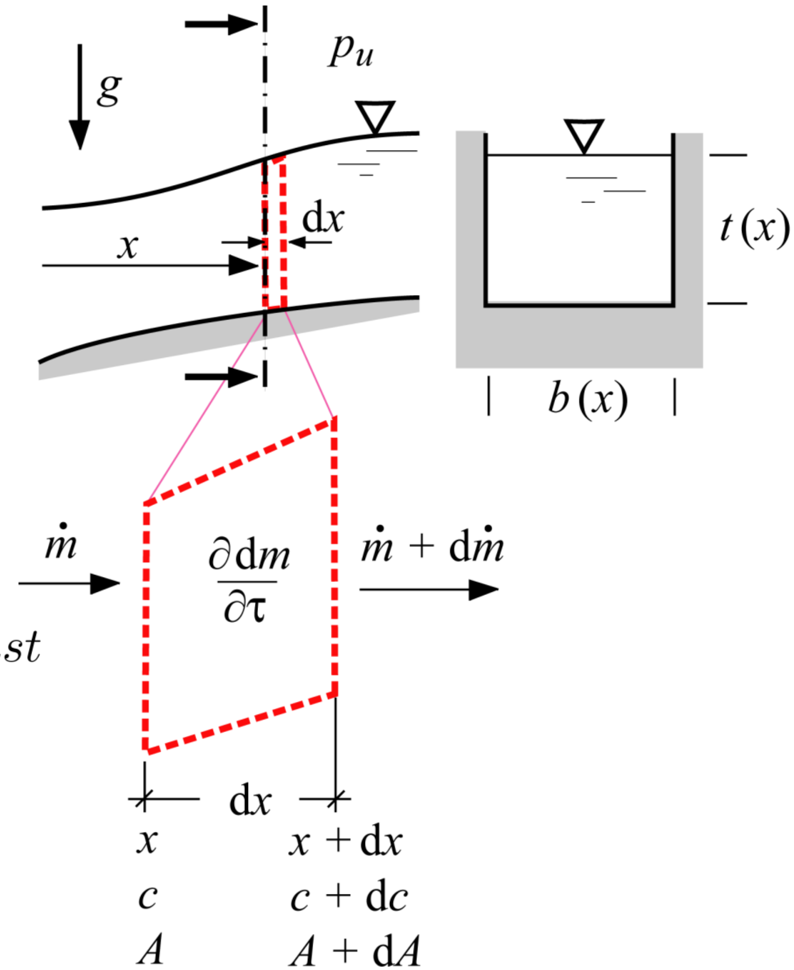
Im Folgenden wird die Zeit mit der Variable $\tau$ bezeichnet, da für die Höhe der Wassersäule wegen der Enthalpie die Variable $h$ nicht mehr zur Verfügung steht.

An das Wort Tiefe angelehnt soll die Wassertiefe mit $t$ bezeichnet werden.

# 4.2.1 Stationäre Bilanzgleichungen

## 4.2.1.1 Stationäre Massenbilanz

Bem.: Hier wird die Zeit mit der Variable $\tau$ bezeichnet, da für die Höhe der Wassersäule die Variable $h$ nicht mehr zur Verfügung steht, weshalb an das Wort Tiefe angelehnt $t$ benutzt werden soll.




Bilanz am Volumenelement:

$$\frac{\partial\, \mathrm{d}m}{\partial \tau} = 0 = \dot{m} - \left(\dot{m} + \mathrm{d}\,\dot{m}\right) \;\Rightarrow\; \dot{m} = \rho\, A\, c = const$$

Dichte: $\rho = \dfrac{1}{v} = const$

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung: $A\,c = const$

Differenz zwischen einströmender und ausströmender Masse liefert

die differentielle Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{d}\,(A\,c) = 0 \quad \text{oder} \quad c\,\mathrm{d}A + A\,\mathrm{d}c = 0$$

Division durch $A\,c$ ergibt:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}c}{c} = 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0}$$

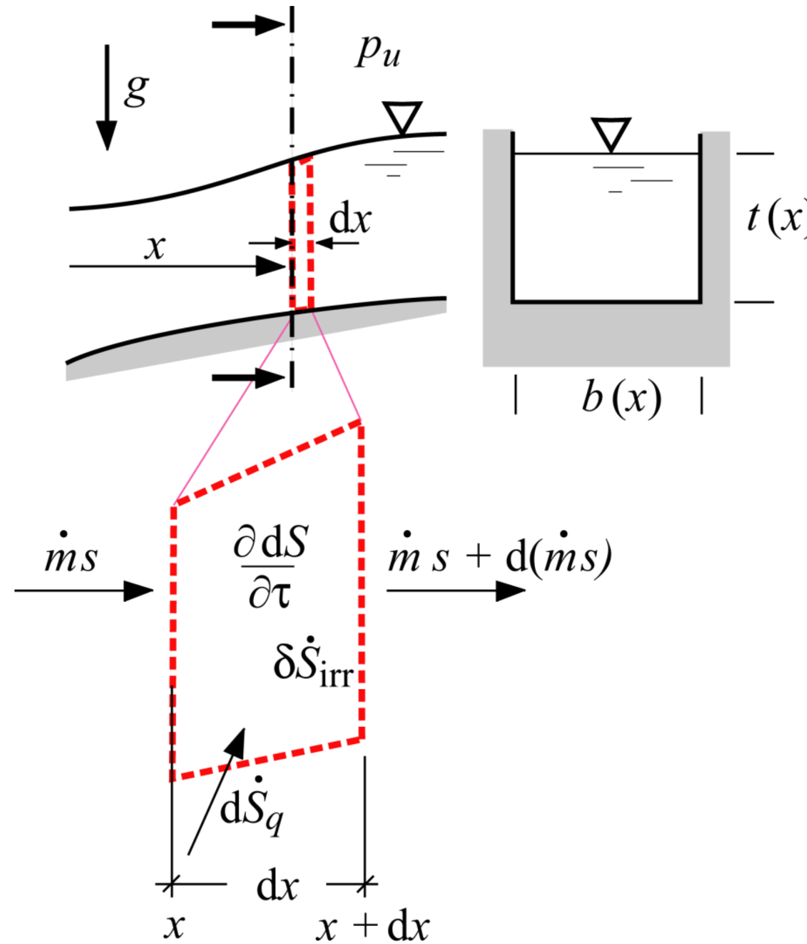
Darin bezeichnet $A = t\,b$ den lokalen Querschnitt, der sich aus der ortsabhängigen Wassertiefe $t\,(x)$ und der Gerinnebreite $b\,(x)$ ergibt:

$$A = b\,t\,, \; \mathrm{d}A = t\,\mathrm{d}b + b\,\mathrm{d}t$$

Es gilt also auch:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\mathrm{d}b}{b} + \frac{\mathrm{d}c}{c} = 0}$$

# 4.2.1.2 Stationäre Entropiebilanz




Bilanz am Volumenelement:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0 = \dot{m}s - \left(\dot{m}s + \frac{\partial(\dot{m}s)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right) + \mathrm{d}\dot{S}_q + \delta\dot{S}_{\mathrm{irr}}$$

Mit Massenbilanz:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0 = \dot{m}\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}\dot{S}_q + \delta\dot{S}_{\mathrm{irr}}$$

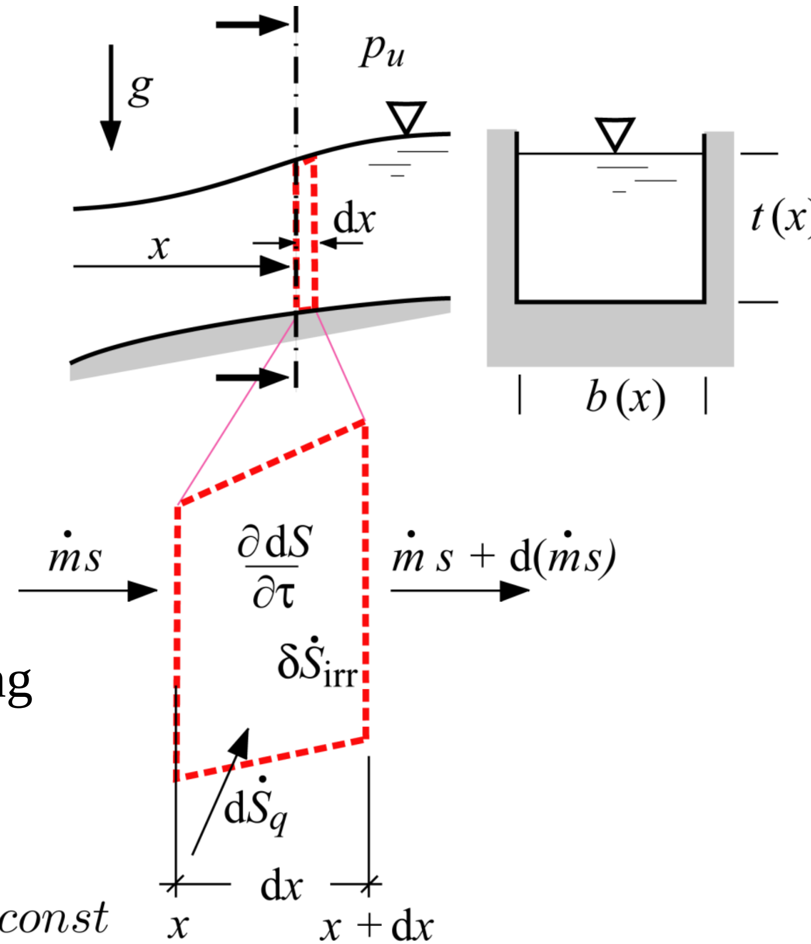
Für adiabate Verhältnisse: $\mathrm{d}\dot{S}_q = 0$

$$\Rightarrow \quad \delta\dot{S}_{\mathrm{irr}} = \dot{m}\,\mathrm{d}s$$

# Auswertung mit Zustandsgleichung für inkompressible Fluide

Eindimensionale Näherung mit $T = T(x)$:

$$\delta \dot{S}_{\mathrm{irr}} = \dot{m}\,\mathrm{d}s = \dot{m}\,c_w \frac{\mathrm{d}T}{T(x)} \quad (*)$$




**Klassifizierung mit 2. Hauptsatz**:

Verlustbehafte Gerinneströmung:

$$\delta \dot{S}_{\mathrm{irr}} > 0 \quad \Rightarrow \quad T(x + \mathrm{d}x) > T(x)$$

Zunahme der Temperatur in Strömungsrichtung

Verlustfreie Gerinneströmung:

$$\delta \dot{S}_{\mathrm{irr}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x + \mathrm{d}x) = T(x) = T = const$$

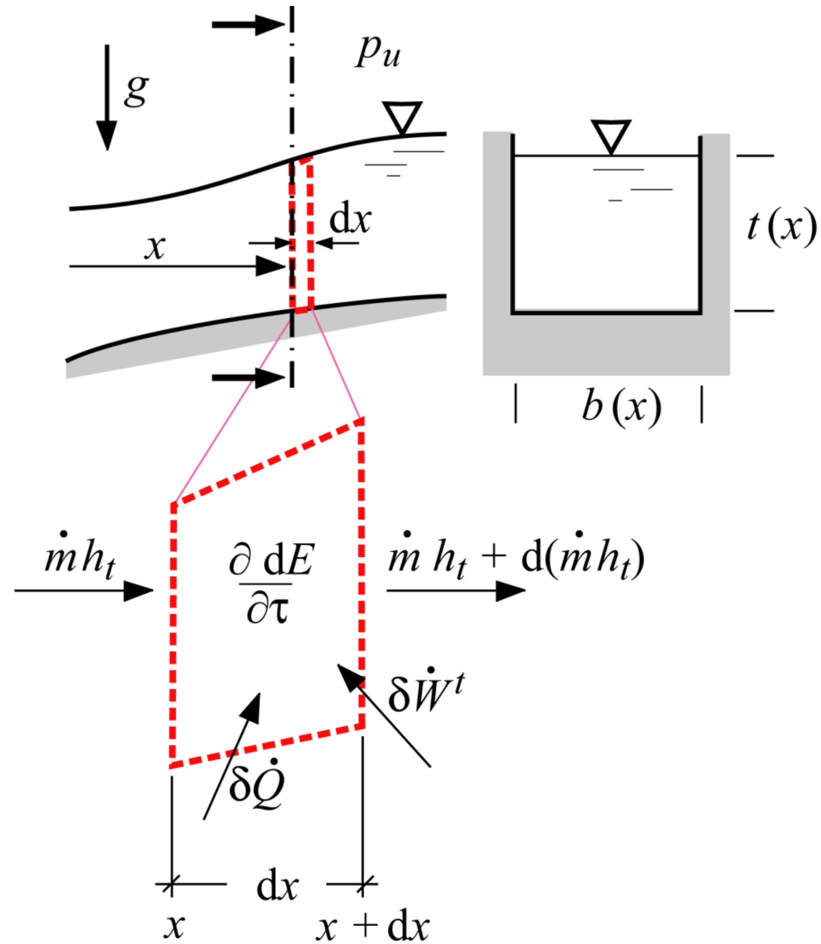
Konstante Temperatur im gesamten Gerinne!

# 4.2.1.3 Stationäre Energiebilanz

Bilanz am Volumenelement

$$\frac{\partial\, \mathrm{d}E}{\partial \tau} = 0 = \dot{H}_t - \left(\dot{H}_t + \frac{\partial(\dot{H}_t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right) + \delta\dot{Q} + \delta\dot{W}^t$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}(\dot{H}_t) = \delta\dot{Q} + \delta\dot{W}^t$$




Spezialfall:

Adiabat ohne Zufuhr technischer Arbeit:

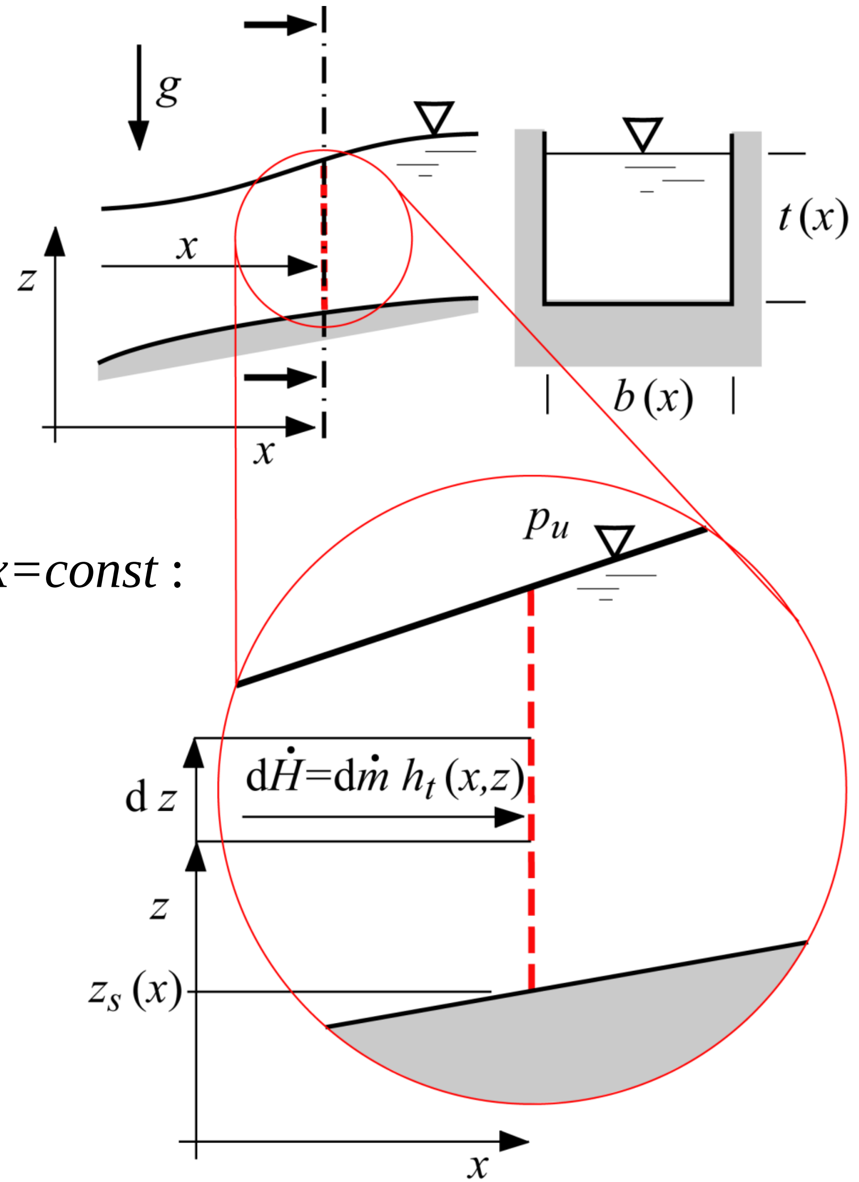
$$\mathrm{d}\dot{H}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{H}_t = const$$

Der Strom an Totalentalpie durch jeden Que

Bestimmung des Enthalpiestromes in jedem Querschnitt $x$ = *const*

$$\dot{H}_t = \int_{z=z_s(x)}^{z=z_s(x)+t(x)} h_t \, d\dot{m} = const$$

mit
$$h_t = h + e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}}$$
$$= u + \frac{p}{\rho} + e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}}$$




Betrachtung eines beliebigen Querschnitts bei $x$=*const* :

Druck in Abhängigkeit der Wassertiefe:

$$p = p_u + \rho\, g\, \big(t - (z - z_s(x))\big)$$

Spezifische äußere Energien:

$$e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\, c^2(x) + g\, z$$

Mit

$$h_t = u(x) + \frac{p_u}{\rho} + g\left(t - (z - z_s(x))\right) + \frac{1}{2}\,c^2(x) + g\,z$$

und

$$\mathrm{d}\dot{m} = \rho\, b(x)\, c(x)\, \mathrm{d}z$$

ergibt sich für den Enthalpiestrom durch jeden Querschnitt:

$$\begin{aligned}
\dot{H}_t &= \rho\, b(x)\, c(x) \int\limits_{z_s(x)}^{z_s(x)+t(x)} \left(u(x) + \frac{p_u}{\rho} + g\left(t - (z - z_s(x))\right) + \frac{1}{2}\,c^2(x) + g\,z\right) \mathrm{d}z \\
&= \dot{m}\left(u(x) + \frac{p_u}{\rho}\right) + \rho\, b(x)\, c(x) \int\limits_{z_s(x)}^{z_s(x)+t(x)} \left(g\left(t - (z - z_s(x))\right) + \frac{1}{2}\,c^2(x) + g\,z\right) \mathrm{d}z \\
&= \dot{m}\left(u(x) + \frac{p_u}{\rho} + g\left(t(x) + z_s(x)\right) + \frac{1}{2}\,c^2(x)\right)
\end{aligned}$$

Die Forderung

$$\dot{H}_t = \int\limits_{z=z_s(x)}^{z=z_s(x)+t(x)} h_t \, \mathrm{d}\dot{m} = const$$

liefert daher wegen $p_u/\rho = const$ und des konstanten Massenstroms:

$$u(x) + g\,t(x) + \frac{1}{2}\,c^2(x) + g\,z_s(x) = const$$

Mit der Zustandsgleichung für das inkompressible Fluid

$$u(x) = c_w \left( T(x) - T_{\mathrm{ref}} \right)$$

liefert dies eine Aussage für das Temperaturfeld:

$$c_w\,T(x) + g\,t(x) + \frac{1}{2}\,c^2(x) + g\,z_s(x) = const$$

Die für jeden Querschnitt gültige Beziehung

$$c_w\,T + g\,t + \frac{1}{2}\,c^2 + g\,z_s \;=\; const \qquad (**)$$

lässt sich weiter interpretieren:

- Der erste Term ist der Beitrag der Inneren Energie, wobei diese in Strömungsrichtung durch Reibungsverluste anwachsen kann.

  Für adiabate Strömungen können wir die Temperaturänderung mit der Entropieproduktion durch Reibung verknüpfen (Int. von Gl. (*)). Mit

$$\frac{\dot{S}_{\mathrm{irr}}}{\dot{m}} \;=\; c_w\;\ln\left(\frac{T(x+\Delta x)}{T(x)}\right)$$

  folgt die Beziehung:

$$\int T\,\mathrm{d}s_{\mathrm{irr}} + g\,t + \frac{1}{2}\,c^2 + g\,z_s \;=\; const$$

Energiebilanz: $$c_w\,T + g\,t + \frac{1}{2}\,c^2 + g\,z_s \;=\; const$$

- Der zweite Term ist der Beitrag des hydrostatischen Druckes aus der Strömungsarbeit.

- Der dritte Term ist der Beitrag der kinetischen Energie.

- Der vierte Term der Beitrag der potentiellen Energie.

Im Spezialfall der adiabaten, verlustlosen Strömung, $s_{\mathrm{irr}} = \Delta s = 0$ , ist $T = const$ und damit auch $u = const$, so dass dann die Energiebilanz lautet:

$$g\,t + \frac{1}{2}\,c^2 + g\,z_s \;=\; const$$

Dies entspricht der Bernoullischen Gleichung auf Niveau der Sohle

$$\frac{p(x, z_s)}{\rho} + \frac{1}{2}\,c^2(x) + g\,z_s(x) \;=\; const$$

Bem.: Alternativ erhält man diese Aussage auch aus dem Impulsbilanz für verlustfreie eindimensionale Strömungen (siehe nächster Abschnitt).

# 4.2.1.4 Stationäre Impulsbilanz für reibungsfreie Gerinneströmungen



Bilanz am Volumenelement in $z$-Richtung*)

$$\frac{\partial \, \mathrm{d}I_z}{\partial \tau} \;=\; 0 \;=\; p\, b(x)\, \mathrm{d}x - p_u\, b(x)\, \mathrm{d}x - \mathrm{d}G$$

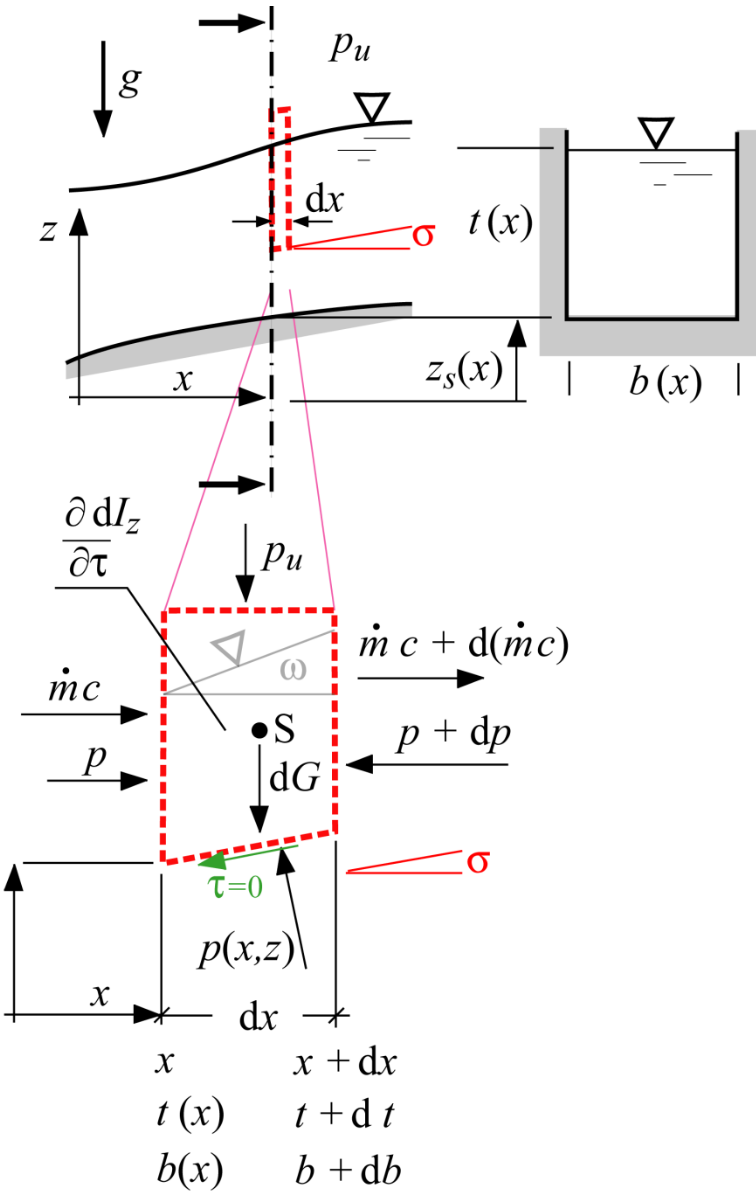
$$\text{mit} \qquad \mathrm{d}G = \rho\, b(x)\, \mathrm{d}x \left(t - (z - z_s)\right) g$$

$$\Rightarrow \qquad p(x,z) \;=\; p_u + \rho\, g \left(t(x) - \left(z(x) - z_s(x)\right)\right)$$

Der Druck nimmt also linear mit der Tiefe zu.

Dies entspricht dem hydrostatischen Druck.

*) Dabei verläuft die untere Begrenzung des Volumenelementes in Richtung der lokalen Strömungsrichtung mit Winkel σ, so dass dort kein Massenstrom über die Grenze tritt, der Impuls mitführen würde.



# Bilanz am Volumenelement in $x$-Richtung*)

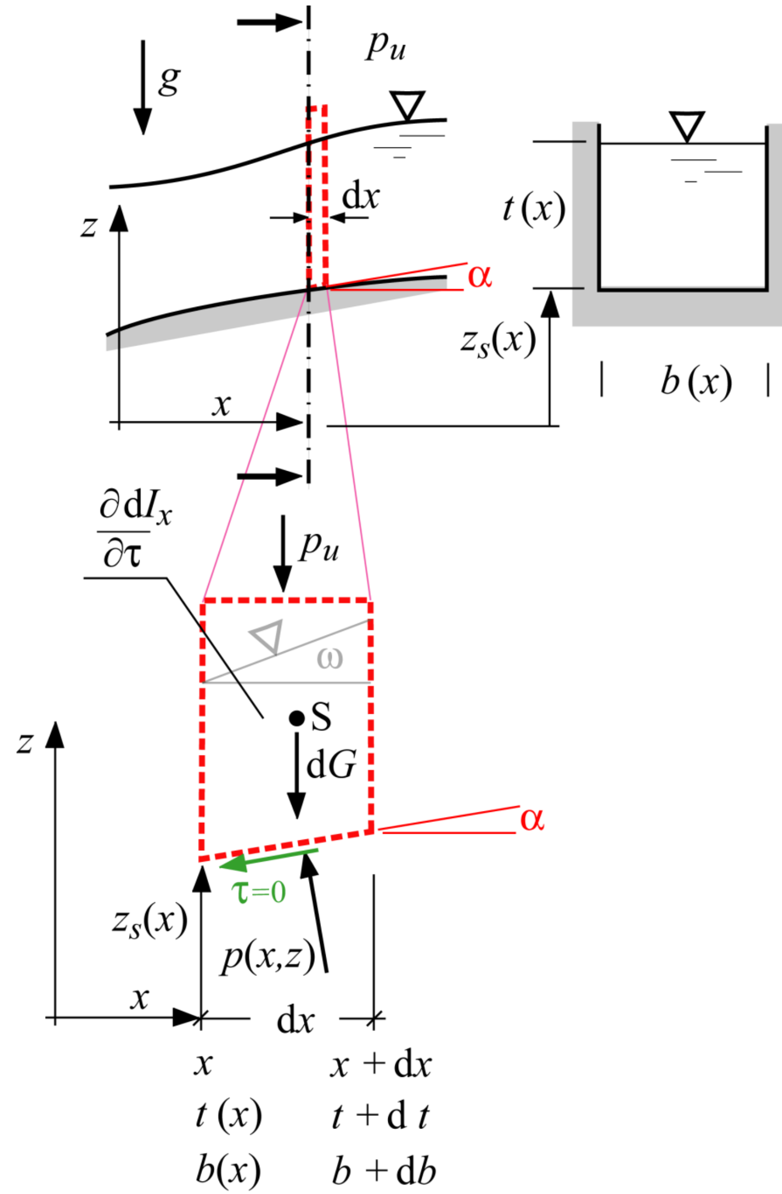
$$\frac{\partial\, \mathrm{d}I_x}{\partial \tau} = 0 \;=\; -\frac{\partial(\dot{m}c)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \sum \mathrm{d}F_x$$

Kräftebilanz in $x$-Richtung:

Bei vernachlässigter Reibung ($\tau = 0$) besitzen nur Druckkräfte einen Beitrag in $x$-Richtung, wobei für das strömende Fluid gilt:

$$p(x,z) \;=\; p_u + \rho\, g \left( t(x) - \big( z(x) - z_s(x) \big) \right)$$

*) Die untere Begrenzung des Volumenelementes soll jetzt mit dem Boden des Gerinnes unter der Strömungsrichtung $\alpha$ zusammenfallen.



An den <u>durchströmten</u> Flächen können wir, da der Druck linear in *z*-Richtung abnimmt, jeweils mittlere Drücke einführen:

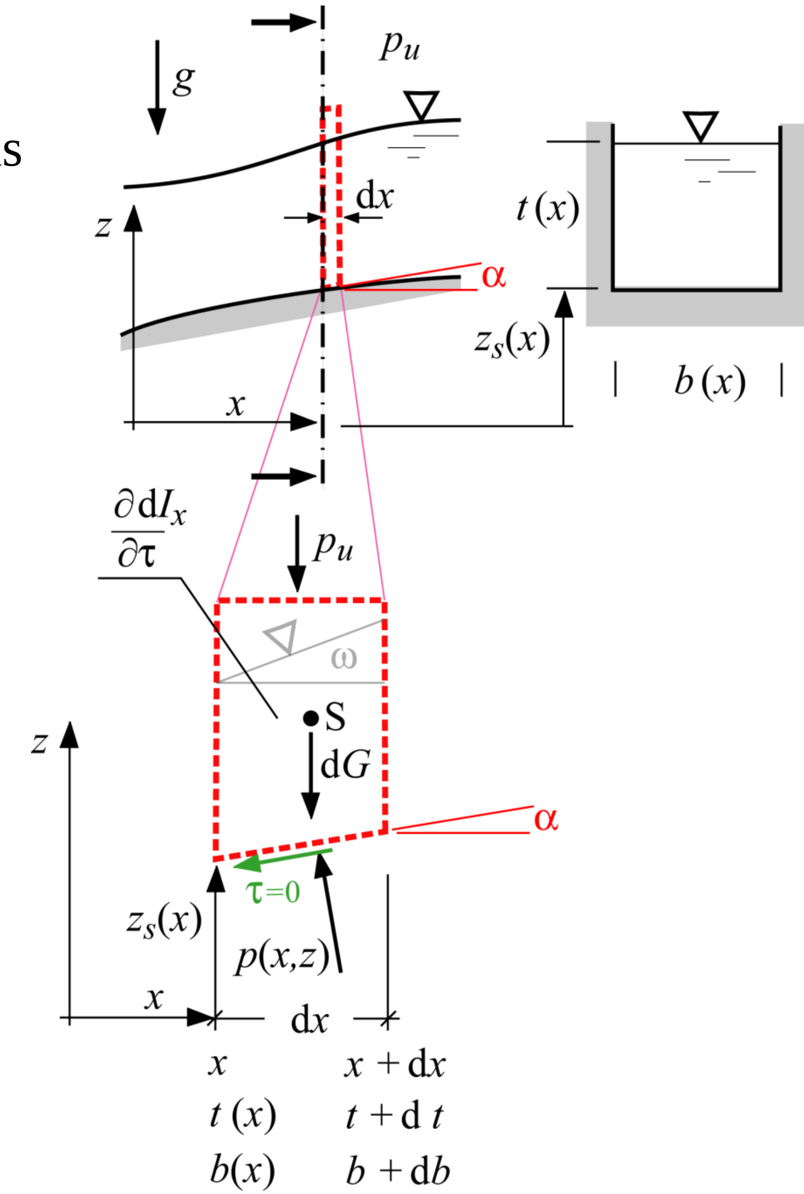
$$\bar{p}(x) = p_u + \rho\, g\, \frac{t(x)}{2}$$

$$\bar{p}(x + \mathrm{d}x) = p_u + \rho\, g\, \frac{t(x) + \mathrm{d}t}{2}$$

Es fehlen noch die Beiträge an den nicht senkrechten Flächen:

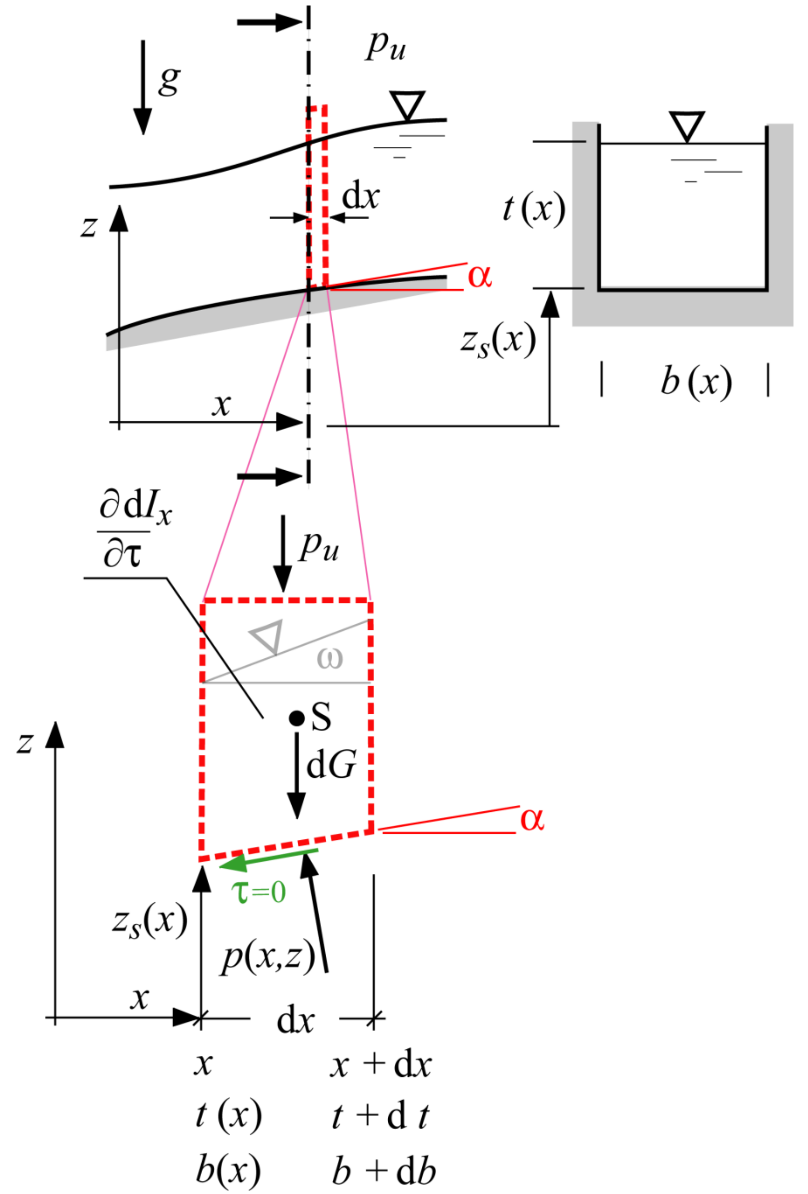
$$p_u\,(\mathrm{d}t + \mathrm{d}z_s)\,b \quad \text{und} \quad -\,p(x, z_s)\,\mathrm{d}z_s\,b$$

Bem.: Bezgl. von Vorzeichen ist dabei zu beachten, dass in der Abbildung d $z_s < 0$ ist.



Damit ergibt sich für die Kräftebilanz

$$\begin{aligned}\sum \mathrm{d}F_x &= \bar{p}(x)\,t\,b - \bar{p}(x+\mathrm{d}x)\,(t+\mathrm{d}t)\,b + \\ &\quad + p_u\,(\mathrm{d}t + \mathrm{d}z_s)\,b - p(x,z_s)\,\mathrm{d}z_s\,b \\ &= -\rho\,g\,t\,b\,(\mathrm{d}t + \mathrm{d}z_s)\end{aligned}$$




und mit

$$\dot{m} = \rho\,t\,b\,c$$

liefert die stationäre Impulsbilanz:

$$0 = -c\,\mathrm{d}c - g\,(\mathrm{d}t + \mathrm{d}z_s)$$

Die Impulsbilanz lässt sich in *x*-Richtung sofort integrieren und liefert

$$\frac{1}{2}\,c^2(x)\;+\;g\,t\;+\;g\,z_s\;=\;const$$

Mit

$$p(x,z)\;=\;p_u+\rho\,g\left(t(x)-\big(z(x)-z_s(x)\big)\right)$$

ergibt sich

$$\frac{1}{2}\,c^2(x)\;+\;\frac{p(x,z)}{\rho}\;+\;g\,z(x)\;=\;const$$

Dies ist die Bernoullische Gleichung der inkompressiblen, verlustlosen Strömung.

Speziell für die Sohle gilt:

$$\frac{1}{2}\,c^2(x)\;+\;\frac{p(x,z_s)}{\rho}\;+\;g\,z_s(x)\;=\;const$$

Übung

Zeigen Sie, dass die Konstante in der Bernoullischen Gleichung

$$\frac{1}{2}\,c^2(x)\,+\,\frac{p(x,z)}{\rho}\,+\,g\,z(x)\,=\,const$$

im gesamten Strömungsfeld den gleichen Wert besitzt!

**Diskussion**

Wir haben die Bernoullische Gleichung

$$\frac{1}{2}\,c^2(x) + \frac{p(x,z)}{\rho} + g\,z(x) = const$$

auf zweierlei Weise hergeleitet.

1. Bei Benutzung der Energie- und Entropiebilanz hatten wir sie für die verlustlose, inkompressible und adiabate Strömung hergeleitet.

2. Bei der Ableitung mit dem Impulssatz haben wir die Einschränkung adiabat jedoch nicht gebraucht, aber inkompressibel vorausgesetzt (Druckverteilung in *z*-Richtung).

**Diskussion (kont.)**

Dies bedeutet, dass Wärmezufuhr nur das Temperaturfeld beeinflusst, nicht jedoch die in der Bernoullischen Gleichung bilanzierten mechanischen Energieformen.

Dass kein Energieaustausch zwischen thermischen und mechanischen Energien stattfindet ist ein Charakteristikum der *verlustlosen*, inkompressiblen Strömungen und unterscheidet diese von verlustlosen, kompressiblen Strömungen, bei denen stets alle Energieformen miteinander in Austausch stehen.

Vergl. die verlustlosen kompressiblen Strömungen mit veränderlichem Querschnitt.

, wie wir bei der Diskussion der Fanno-Strömung

**Diskussion (kont.)**

Bemerkung bei *verlustbehafteten* Strömungen:

Für adiabate Strömungen gilt weiterhin die Energiegleichung in der Form

$$c_w\, T + g\, t + \frac{1}{2}\, c^2 + g\, z_s \;=\; const$$

bzw. mit der spezifischen Entropieproduktion $s_{\mathrm{irr}}$

$$\int T\, \mathrm{d}s_{\mathrm{irr}} + g\, t + \frac{1}{2}\, c^2 + g\, z_s \;=\; const$$

Wir können dies als Bernoulli-Gleichung mit Verlustterm interpretieren.

Übung



Leiten Sie das Ergebnis

$$c\,\mathrm{d}c \;=\; -g\left(\mathrm{d}t + \mathrm{d}z_s\right)$$

der Impulsbilanz in *x*-Richtung am Volumenelement her!

Beachten Sie dabei,

- dass sowohl die Breite $b(x)$ als auch die Tiefe $t(x)$ sowie die Sohlenhöhe $z_s(x)$ variabel sind

- und dass das Druckfeld eine zweidimensionale Funktion ist mit

$$p(x,z) \;=\; p_u + \rho\, g\left(t(x) - \left(z(x) - z_s(x)\right)\right)$$

Vergleichen Sie das hier gefundene Ergebnis mit der Impulsbilanz

$$\rho\, c\,\mathrm{d}c \;=\; -\mathrm{d}p$$

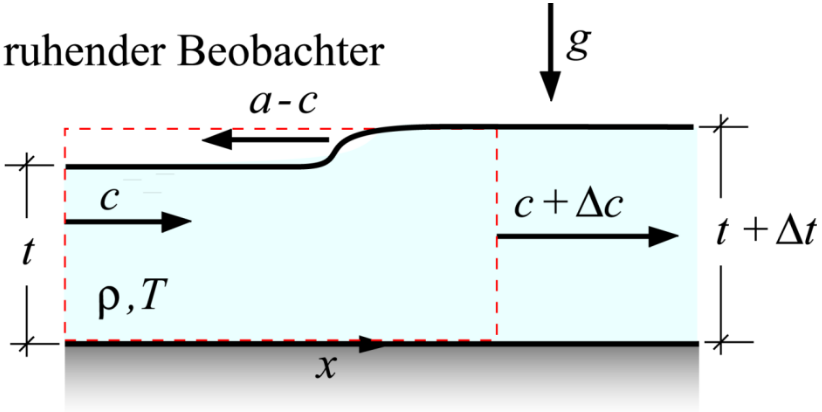
für den geschlossenen Kanal mit veränderlichem Querschnitt!

# 4.2.2. Ausbreitungsgeschwindigkeit von Flachwasserwellen

## Isentrope Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wechselsprünge

Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen zu untersuchen, müssen wir im Allgemeinen einen relativ zur Sohle instationären Vorgang betrachten. [1)]

Ruhender Beobachter:



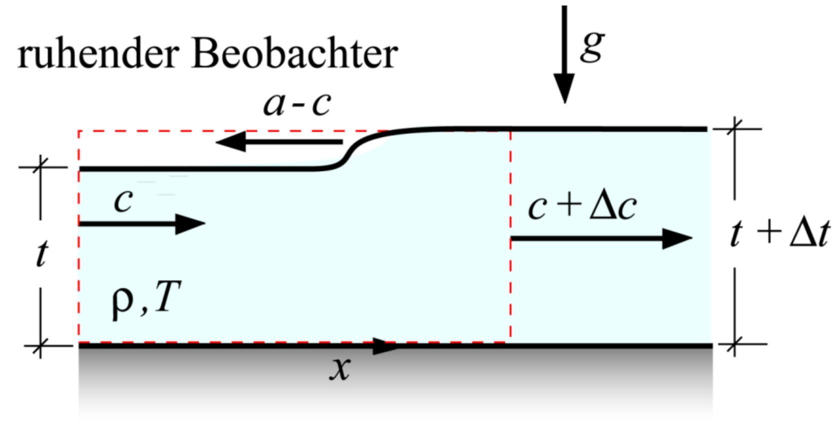

- Gerinneströmung nach rechts mit der Geschwindigkeit $c$

- Störung der Gerinnetiefe $t$ , die sich nach links mit Geschwindigkeit $a$ - $c$ ausbreiten soll.

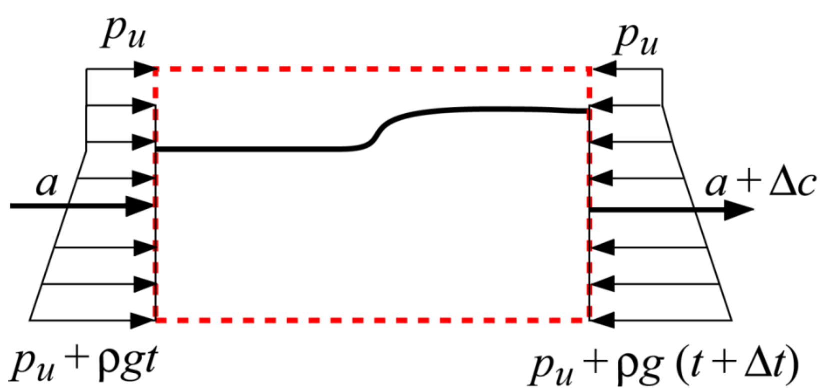
- Änderung der Strömungsgeschwindigkeit $\Delta c$ bei $t + \Delta t$

[1)] vergl. Ausbreitung von Schallwellen, 4.1.2-1

Übergang ins mitbewegte Kontrollsystem, um einen stationären Vorgang beschreiben zu können.




Mitbewegter Beobachter:

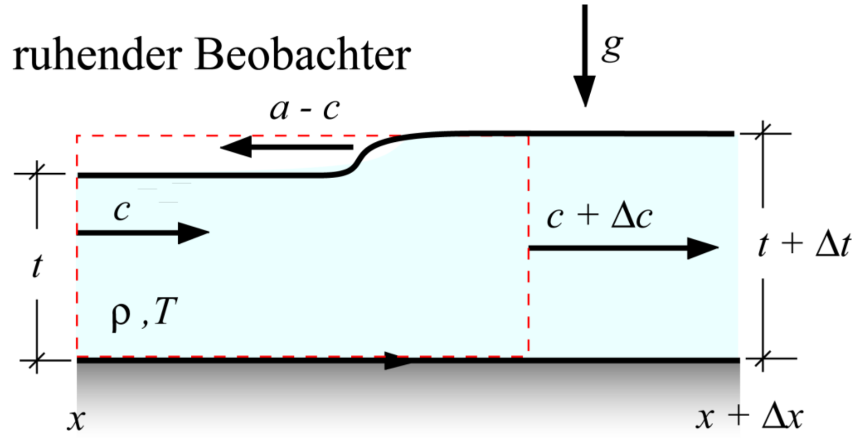



- Mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $a$ eintretender Strom
- Mit der Geschwindigkeit $a + \Delta c$ austretender Strom

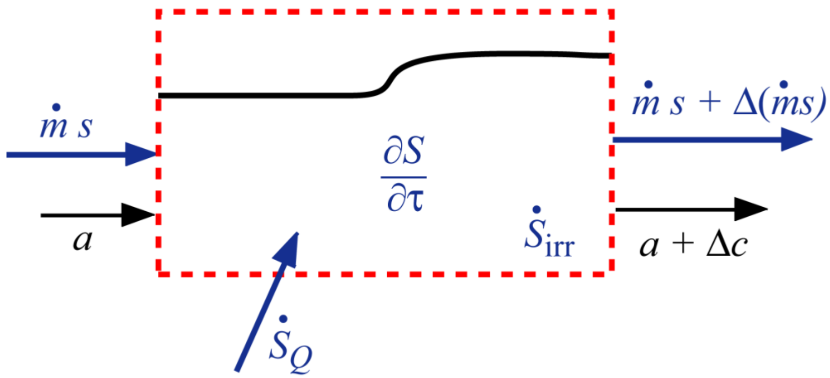
# Stationäre Entropiebilanz für Gerinne im mitbewegten Kontrollsystem:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0 = \dot{S} - \left(\dot{S} + \Delta\dot{S}\right) + \dot{S}_Q + \dot{S}_{\mathrm{irr}}$$

ruhender Beobachter




mitbewegtes Kontrollsystem




Für adiabates Gerinne

$$\dot{S}_Q = 0$$

Mit der Massenbilanz

$$\dot{m} = const$$

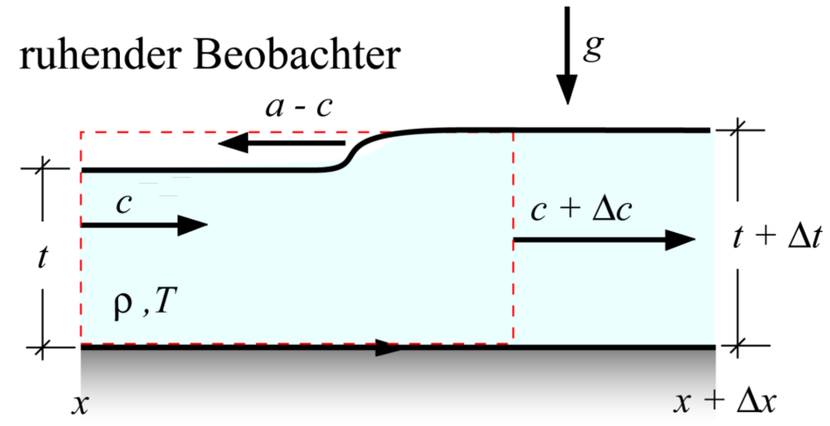
folgt:

$$\dot{S}_{\mathrm{irr}} = \Delta\dot{S}$$

Mit der Zustandsgleichung und $T$=$T$($x$) folgt

(Integration von Gl. (*)):

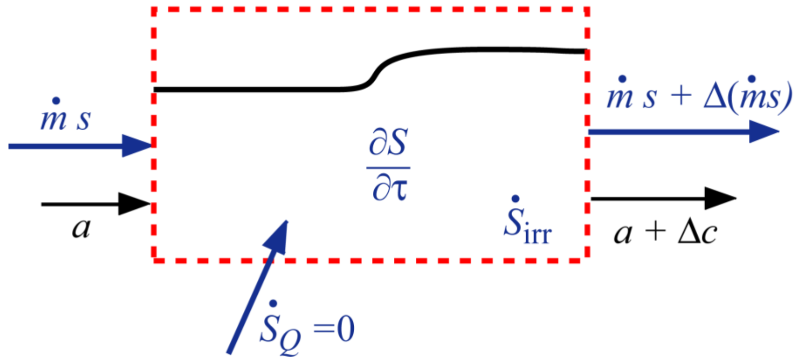
$$\Rightarrow \quad \dot{S}_{\text{irr}} = \Delta\dot{S} = \dot{m}\,\Delta s = \dot{m}\,c_w\,\ln\left(\frac{T+\Delta T}{T}\right)$$




mitbewegtes Kontrollsystem

Der Zweite Hauptsatz fordert

$$\dot{S}_{\text{irr}} \overset{!}{\geq} 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T \geq 0$$



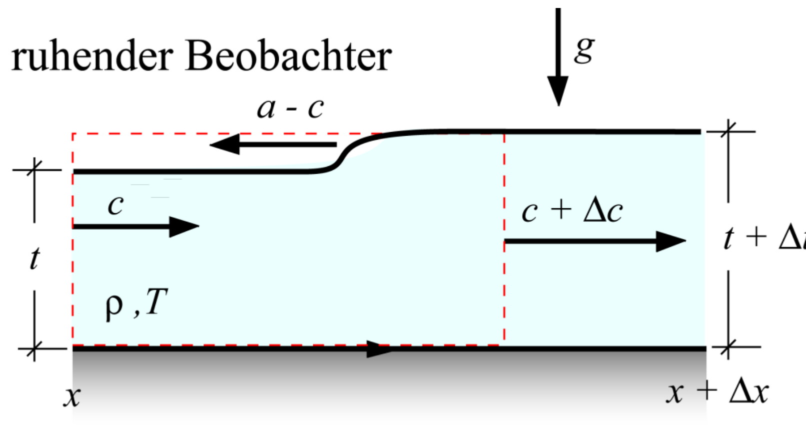

In Strömungsrichtung muss also die Temperatur konstant bleiben (verlustlose Strömung) oder zunehmen (verlustbehaftete Strömung).

Stationäre Energiebilanz am mitbewegten Kontrollsystem für adiabates Gerinne ohne Zufuhr techn. Arbeit mit ebener Sohle $\mathrm{d}z_s = 0$ (siehe Energiebilanz Gl. (**)):

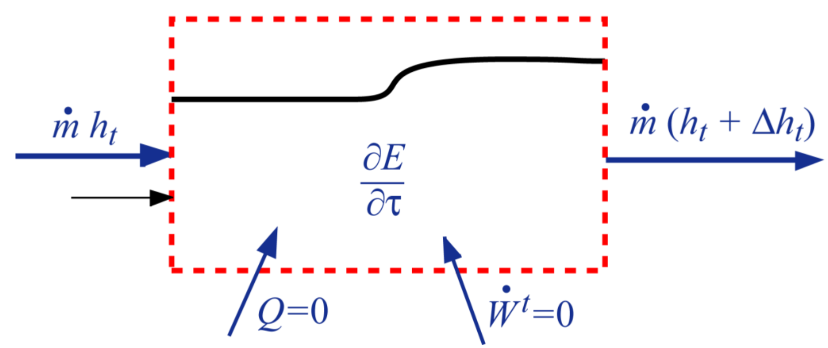
$$c_w\, T + g\, t + \frac{1}{2}\, a^2$$

$$= c_w\, (T + \Delta T) + g\, (t + \Delta t) + \frac{1}{2}\, (a + \Delta c)^2$$

ruhender Beobachter




mitbewegtes Kontrollsystem




Die Ausrechnung liefert in führender Ordnung:

$$c_w\, \Delta T = -\,(a\, \Delta c + g\, \Delta t)$$

Die Geschwindigkeitsänderung $\Delta c$ erhalten wir mit der Massenbilanz.

Stationäre Massenbilanz am mitbewegten

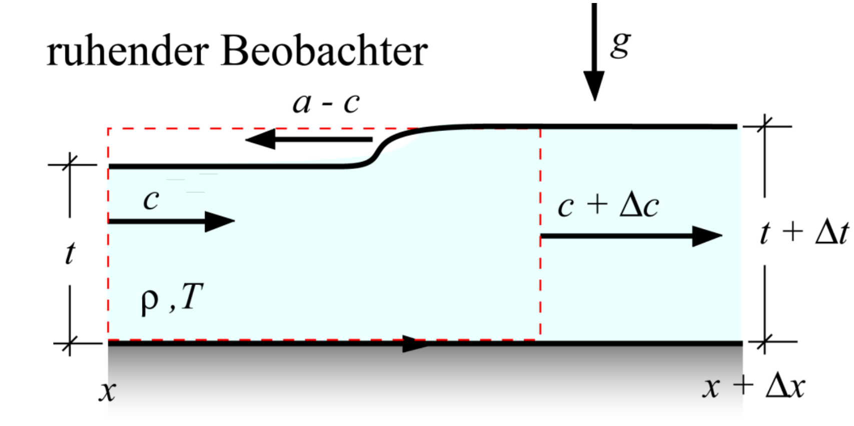
Kontrollsystem:

$$a\,t = (a + \Delta c)\;(t + \Delta t)$$

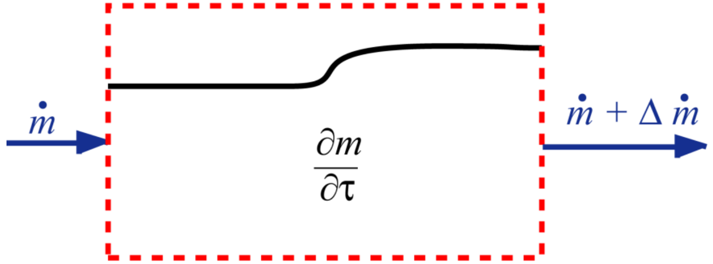
Ausrechnung liefert:

$$\Rightarrow \quad \Delta c = -\,a\frac{\Delta t}{t + \Delta t}$$

ruhender Beobachter




mitbewegtes Kontrollsystem



Damit folgt aus der Energiebilanz:

$$c_w \, \Delta T = \Delta t \left( a^2 \, \frac{t + \Delta t/2}{(t+\Delta t)^2} \Big) - g \right)$$

Der Zweiten Hauptsatzes ist erfüllt, falls $\Delta T > 0$.

Dies liefert zunächst die beiden Möglichkeiten:

$$\Delta t < 0 \text{ und } \quad a^2 \left( \frac{t + \Delta t/2}{(t+\Delta t)^2} \right) < g \quad \text{oder} \quad \Delta t > 0 \text{ und } \quad a^2 \left( \frac{t + \Delta t/2}{(t+\Delta t)^2} \right) > g$$

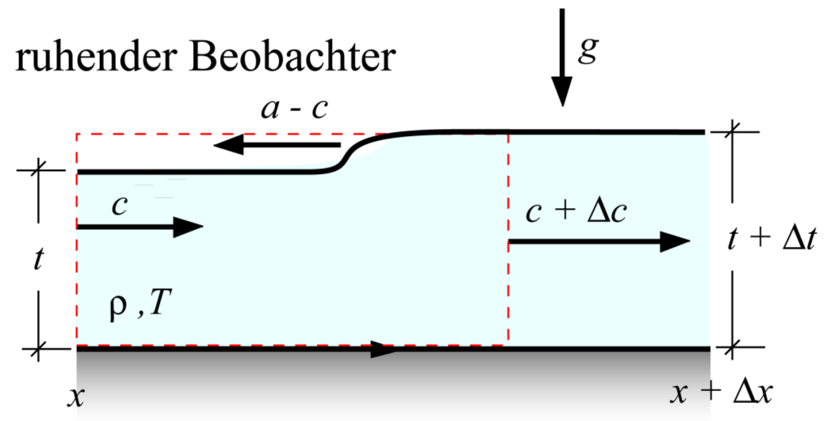
Darin ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit $a$ noch unbekannt.

Stationäre Impulsbilanz am mitbewegten

Kontrollsystem:

$$\dot{m}\, a + \rho\, g\, \frac{t^2}{2} = \dot{m}\, (a + \Delta c) + \rho\, g\, \frac{(t+\Delta t)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = t\, a\, \Delta c + g\, \left( t\, \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \right)$$

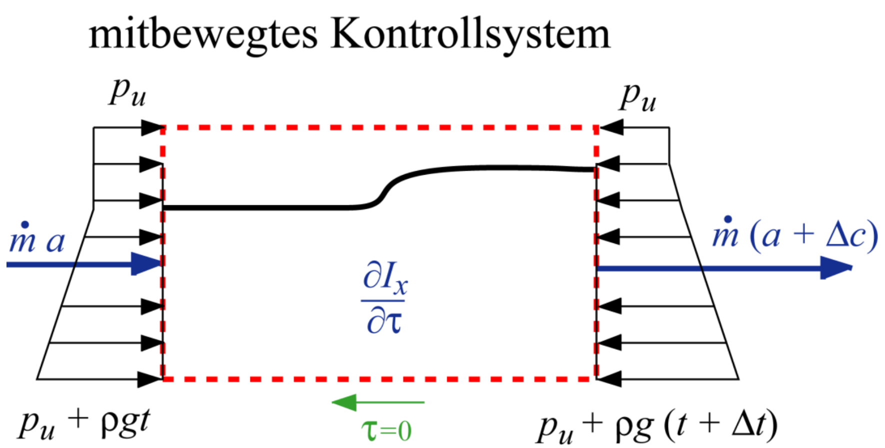



Mit Massenbilanz

$$\Delta c = -\, a \frac{\Delta t}{t + \Delta t}$$

folgt:

$$a^2 = g\, t\, \left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2\, t}\right)$$



Forderung des Zweiten Hauptsatzes:

$$\Delta t < 0 \text{ und } \quad a^2 \left( \frac{t + \Delta t/2}{(t+\Delta t)^2} \right) < g \quad \text{oder} \quad \Delta t > 0 \text{ und } \quad a^2 \left( \frac{t + \Delta t/2}{(t+\Delta t)^2} \right) > g$$

Mit

$$a^2 = g\, t \left( 1 + \frac{\Delta t}{t} \right) \left( 1 + \frac{\Delta t}{2\, t} \right)$$

ist

$$a^2 \left( \frac{t + \Delta t/2}{(t+\Delta t)^2} \right) = g \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{(\Delta t/t)^2}{1 + \Delta t/t} \right) \overset{\text{stets}}{>} g$$

Für $\Delta t < 0$ kommt es zum Widerspruch zum Zweiten Hauptsatz.

Es sind für die angenommene Ausbreitungsrichtung also nur Wasserspiegel-änderungen mit $\Delta t > 0$ erlaubt (Vergl. Verdichtungsstoß).

Die Massenbilanz

$$\Delta c = -\, a \frac{\Delta t}{t + \Delta t}$$

legt damit auch das Vorzeichen der Ausbreitungsgeschwindigkeit fest.

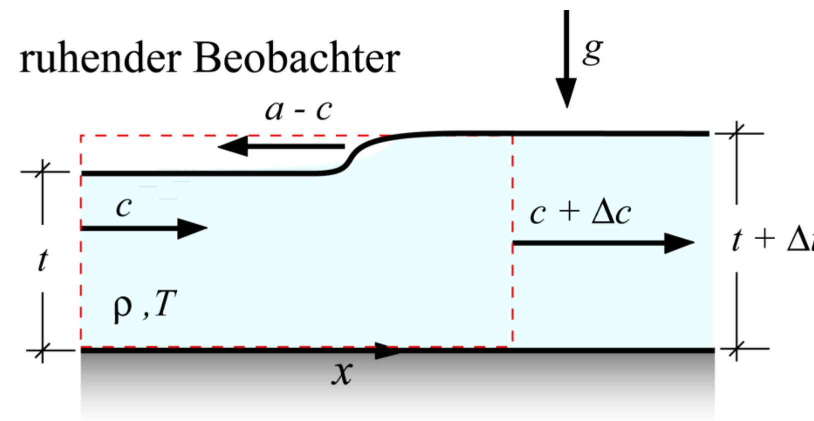
Mit $\Delta t > 0$ muss $\Delta c < 0$ sein.

Dies bedeutet, dass wir als Ausbreitungsgeschwindigkeit

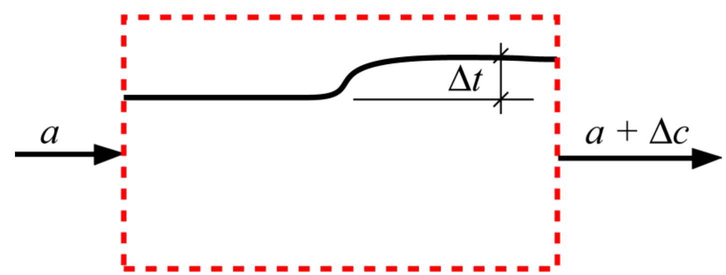
$$a = +\sqrt{g\,t\left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{2\,t}\right)}$$

bekommen, wie es in der Abbildung angenommen war.

ruhender Beobachter

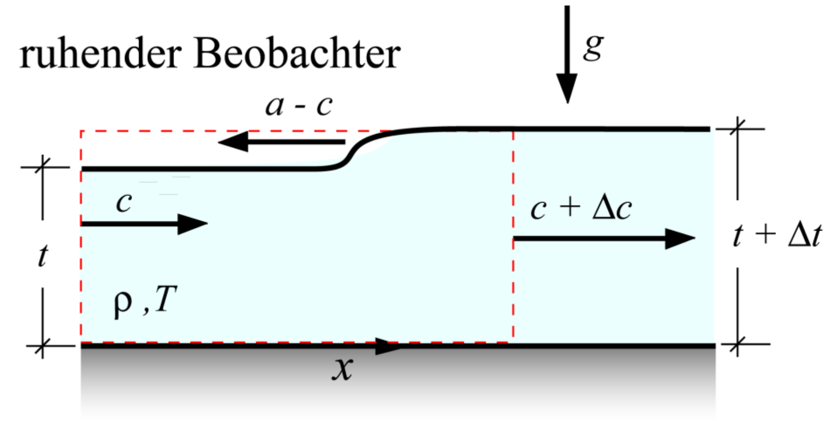



mitbewegtes Kontrollsystem



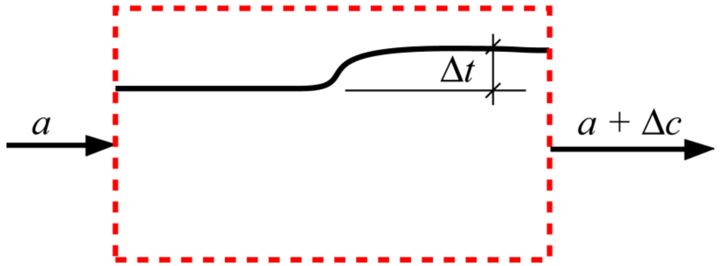
# Diskussion

$$a^2 = g\,t \left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{2\,t}\right) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^0\right)$$




$\Rightarrow$ Die Ausbreitungsgeschwindigkeit steigt mit wachsendem $\Delta t$ .

mitbewegtes Kontrollsystem




$\Rightarrow$ Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist in nullter Ordnung durch die Erdbeschleunigung und die Wassertiefe gegeben.

$\Rightarrow$ Im Grenzfall kleiner Störungen $\Delta t \to 0$ kann die Störung in ruhendem Wasser nicht ortsfest bleiben. Sie bewegt sich mit

$$\boxed{a = \sqrt{g\,t}}$$

**Diskussion**

Im Grenzfall kleiner Störungen $\Delta t \to 0$ verschwindet auch die Entropieproduktion und die Temperaturänderung in der Strömung.

Die Ausbreitunggeschwindigkeit stellt deshalb eine reversible Ausbreitungsgeschwindigkeit dar:

$$a = \sqrt{g\,t} = a_{\mathrm{rev}}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen endlicher Amplitude ist dagegen größer:

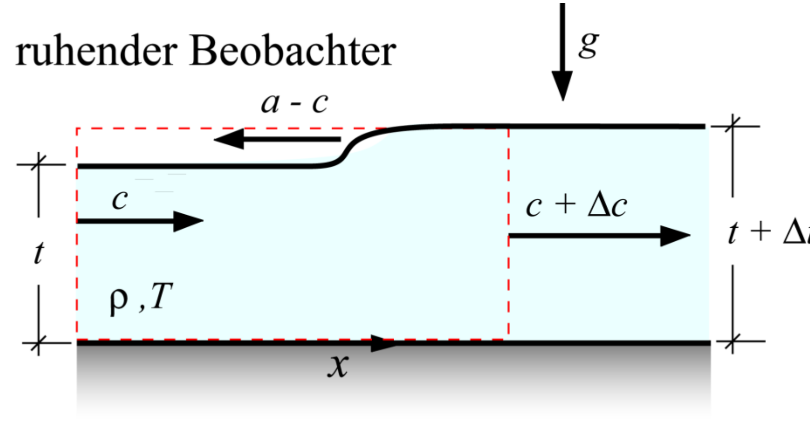
$$a = a_{\mathrm{rev}} \sqrt{g\,t \left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2\,t}\right)} > a_{\mathrm{rev}}$$

Vergl. mit Schallwellen und Stoßwellen in kompr. Medien.

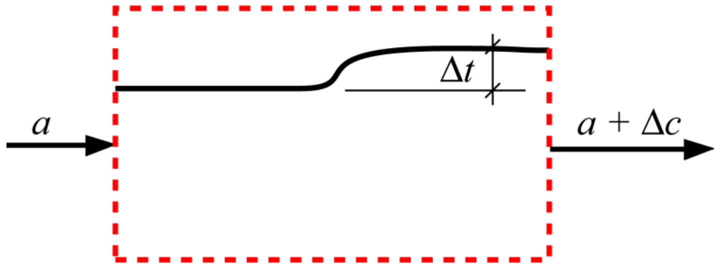
**Diskussion**

$$\Delta c = -\,a\frac{\Delta t/t}{1+\Delta t/t} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^1\right)$$

ruhender Beobachter




mitbewegtes Kontrollsystem




⇒ Die Strömungsgeschwindigkeit des Gerinnes nach der Störung nimmt mit wachsendem $\Delta t$ ab.

⇒ Die Strömungsgeschwindigkeitsänderung ist erster Ordnung in der Spiegeländerung.

⇒ Im Grenzfall kleiner Störungen $\Delta t \to 0$ bleibt die Strömungsgeschwindigkeit im Gerinne unverändert.

$$\boxed{a = \sqrt{g\,t}}$$

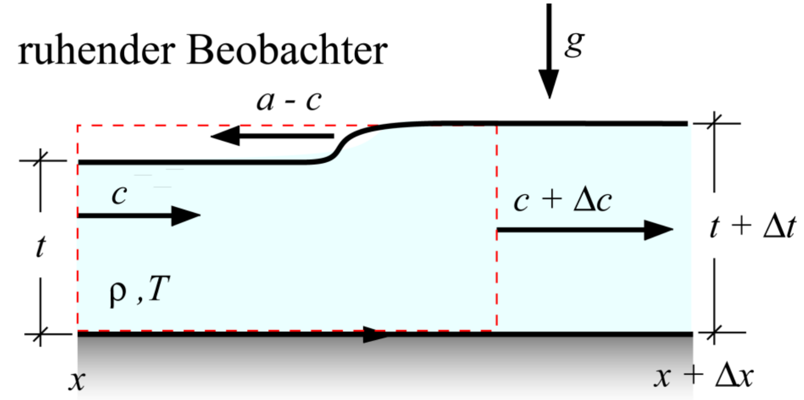
## Diskussion

Für ein adiabates Gerinne mit ebener Sohle ohne Zufuhr techn. Arbeit gilt laut Energiebilanz:

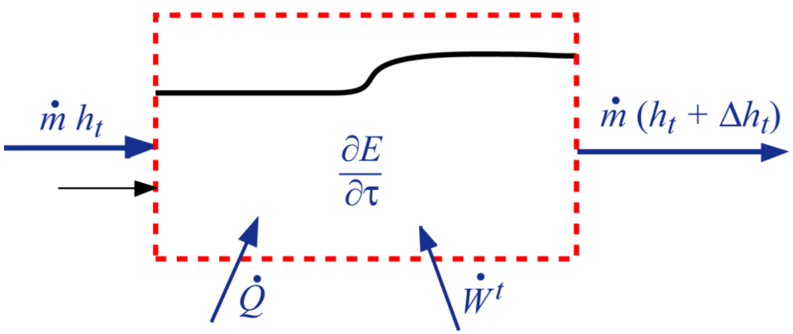
$$c_w\,T + g\,t + \frac{1}{2}\,a^2$$

$$= c_w\;(T + \Delta T) + g\;(t + \Delta t) + \frac{1}{2}\;(a + \Delta c)^2$$

ruhender Beobachter




mitbewegtes Kontrollsystem




Die Ausrechnung liefert:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{g\,t}{4\,c_w\,T}\;\frac{\Delta t}{t}\;\frac{\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}{1 + \frac{\Delta t}{t}} = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^3\right)$$

$\Rightarrow$ Temperaturerhöhungen sind von dritter Ordnung in der Spiegelerhöhung.

$\Rightarrow$ Temperaturerhöhungen sind klein gegenüber Geschw.- und Spiegeländerungen.

# Diskussion

Mit der Temperaturänderung

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{g\,t}{4\,c_w\,T}\,\frac{\Delta t}{t}\,\frac{\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}{1+\frac{\Delta t}{t}} = \mathcal{O}\Big(\big(\frac{\Delta t}{t}\big)^3\Big)$$

können wir auch die Entropieproduktion angeben:

Es ist:

$$s_{\mathrm{irr}} = c_w\,\ln\left(1+\frac{\Delta T}{T}\right) = c_w\,\ln\left(1+\frac{g\,t}{4\,c_w\,T}\,\frac{\Delta t}{t}\,\frac{\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}{1+\frac{\Delta t}{t}}\right) = \mathcal{O}\Big(\big(\frac{\Delta t}{t}\big)^3\Big)$$

Damit ist auch die Entropieproduktion von dritter Ordnung mit der Änderung der Wassertiefe verknüpft. Der 2. Hauptsatz erlaubt also reversible Wellenausbreitung für $\Delta t \to 0$.

# Erbauliches zum Abschluss

## Wechselsprünge (engl. hydraulic jumps)

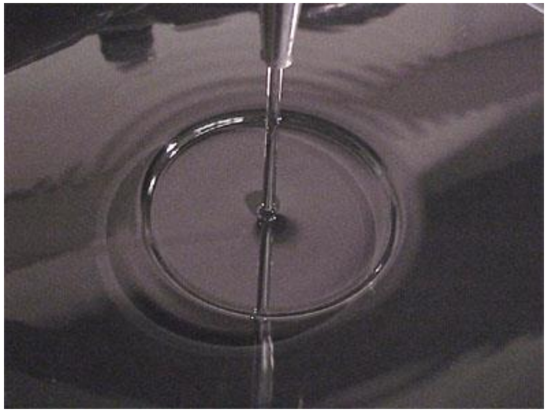
Link: http://www-math.mit.edu/~bush/jump.htm

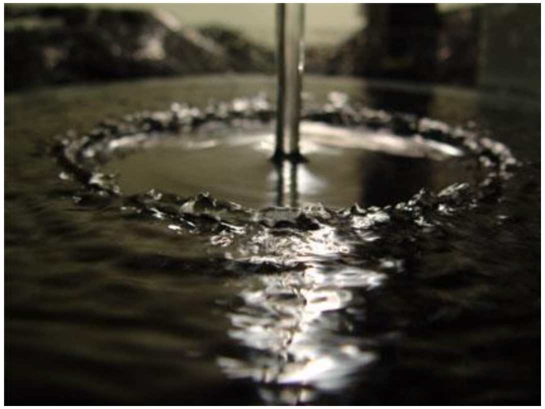
Einfluss der Reynoldszahl (Reibung, Viskosität)

(Reynoldszahl: Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften)

Anwachsende Reynoldszahl von links nach rechts.

laminar turbulent



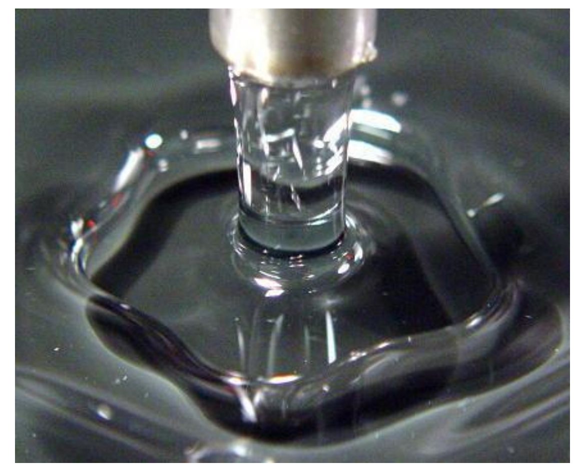


# Wechselsprünge (engl. hydraulic jumps) (kont.)

Link: http://www-math.mit.edu/~bush/jump.htm

Zusätzlicher Einfluss der Weberzahl (Oberflächenspannung)

(Weberzahl: Verhältnis von Trägheits- zu Oberflächenkraft)



# Wechselsprünge (engl. hydraulic jumps) (kont.)

Link: http://www-math.mit.edu/~bush/jump.htm