

# **4. Stationäre eindimensionale kompressible Strömungen sowie inkompressible Strömungen mit freier Oberfläche in einem Schwerfeld**

## **Inhalt von Kapitel 4**

### **4.1 Stationäre, eindimensionale, kompressible Strömungen**

#### **4.1.1 Stationäre Bilanzgleichungen**

##### **4.1.1.1 Stationäre Massenbilanz**

##### **4.1.2.1 Stationäre Impulsbilanz**

##### **4.1.3.1 Stationäre Energiebilanz**

##### **4.1.4.1 Stationäre Entropiebilanz**

#### **4.1.2 Die Schallgeschwindigkeit**

## Inhalt von Kapitel 4

### 4.1.3 Stationäre, kompressible, adiabate und reibungsfreie Strömungen in Rohren oder Kanälen mit veränderlichem Querschnitt

#### 4.1.3.1 Düse und Diffusor in unter- und überschallschnellen Strömungen

#### 4.1.3.2 Lokale Zustandsgrößen einer isentropen Gasströmung aus dem Ruhezustand

#### 4.1.3.3 Erreichen der lokalen Schallgeschwindigkeit in einer Düse

#### 4.1.3.4 Der senkrechte Verdichtungsstoß

## **Inhalt von Kapitel 4**

### **4.1.4 Stationäre, kompressible Strömungen in Rohren oder Kanälen konstanten Querschnitts**

#### **4.1.4.1 Thermodynamik der stationären, adiabaten Strömung mit Reibung in Rohren konstanten Querschnitts**

#### **4.1.4.2 Dynamik der stationären, reibungsfreien Strömung mit Wärmezufuhr in Rohren konstanten Querschnitts**

#### **4.1.4.3 Rohrströmung konstanten Querschnitts ohne Reibung und Wärmezufuhr**

## **4.2. Stationäre, eindimensionale, inkompressible Strömungen mit freier Oberfläche in einem Schwerfeld**

### **4.2.0 Einleitende Bemerkungen**

### **4.2.1 Stationäre Bilanzgleichungen**

#### **4.2.1.1 Stationäre Massenbilanz**

#### **4.2.1.2 Stationäre Entropiebilanz**

#### **4.2.1.3 Stationäre Energiebilanz**

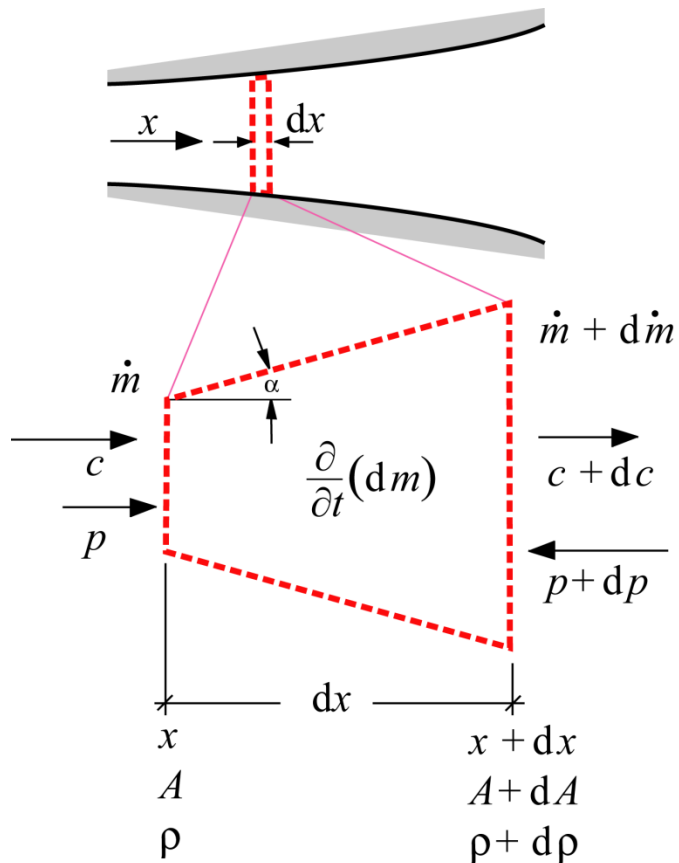
#### **4.2.1.4 Stationäre Impulsbilanz**

### **4.2.2 Ausbreitungsgeschwindigkeit von Flachwasserwellen**

## 4.1 Eindimensionale kompressible Strömungen

### 4.1.1 Stationäre Bilanzgleichungen

#### 4.1.1.1 Stationäre Massenbilanz



Herleitung am Volumenelement

$$\text{Dichte: } \rho = \frac{1}{v}$$

einströmender Massenstrom:

$$\dot{m} = \rho A c$$

Ausströmender Massenstrom:

$$\dot{m} + d\dot{m} = \rho A c + d(\rho A c)$$

Bilanz:

$$\dot{m} + d\dot{m} = \dot{m} \Rightarrow d\dot{m} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Kontinuitätsgleichung: } \rho A c = \text{const}$$

Differenz zwischen einströmender und ausströmender Masse liefert die **differentielle Kontinuitätsgleichung**

$$d(\rho A c) = 0 \quad \text{oder} \quad \rho c dA + A c d\rho + \rho A dc = 0$$

Division durch  $\rho A c$  ergibt:

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{c} \frac{dc}{dx} = 0}$$

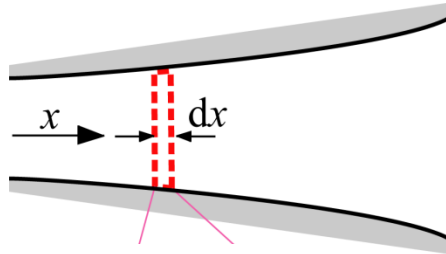
Alternative Herleitung:

Logarithmieren von  $\rho A c = \text{const}$ :

$$\ln \rho + \ln A + \ln c = \ln(\text{const})$$

Differenziert: 
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0$$

Newton in  $x$ -Richtung am Massenelement  $dm$  :

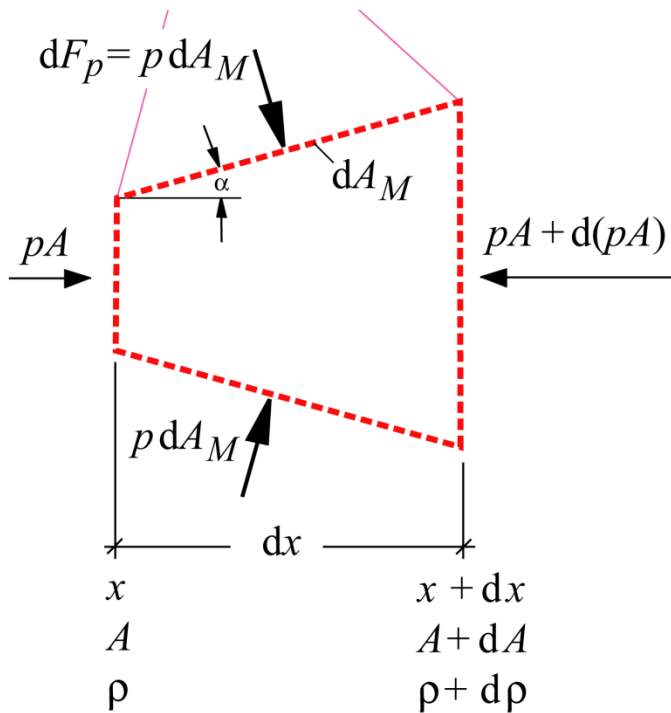


$$\sum dF_x = dm \frac{dc}{dt}$$

hier: nur Druckkräfte

Kräfte in  $x$ -Richtung:

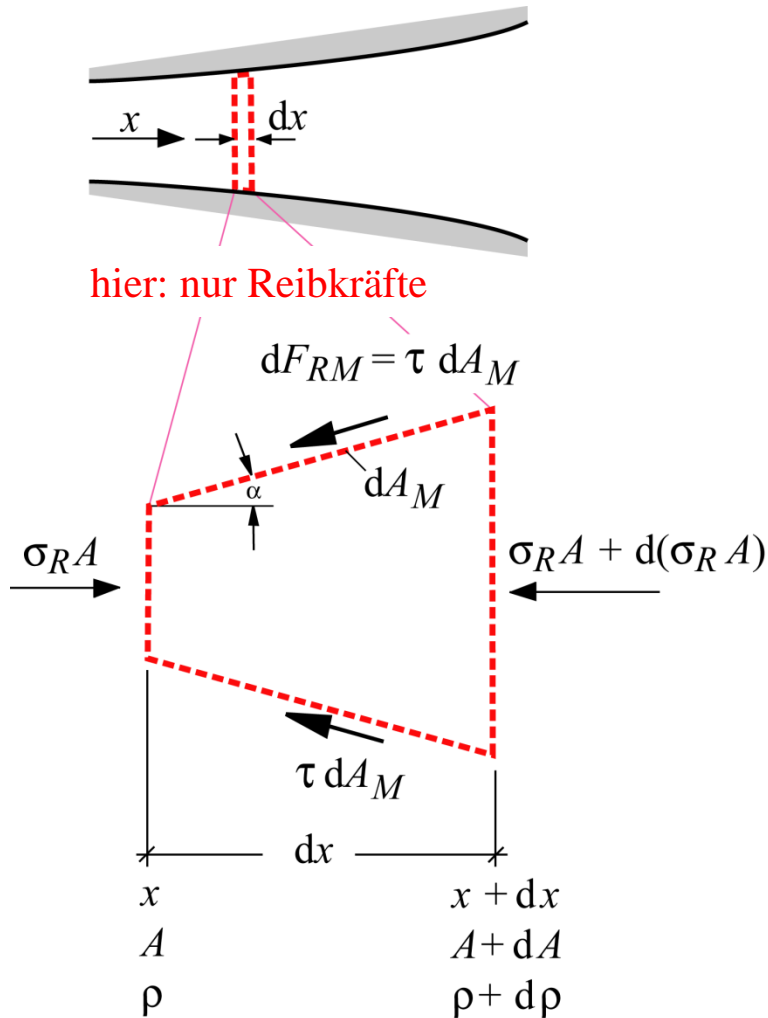
- Druckkräfte auf Stirnflächen  $A, A+dA$  und Mantelfläche  $dA_M$



$$\sum dF_p = pA - (pA + d(pA)) + dF_p \sin \alpha$$

$$dF_p \sin \alpha = p dA_M \sin \alpha = p dA$$

$$\Rightarrow \sum dF_p = - A dp$$

Kräfte in  $x$ -Richtung (kont.):

- Schubspannungen auf Mantelfläche  $dA_M$  bei Rohrumfang  $U$  :
- Normalspannungen durch Reibung an den Stirnflächen

$$\begin{aligned} \sum dF_R &= -d(\sigma_R A) - \tau dA_M \cos \alpha \\ &= -d(\sigma_R A) - \tau U dx \end{aligned}$$

Kräftebilanz insgesamt:

$$\Rightarrow \sum dF_x = -A dp - d(\sigma_R A) - \tau U dx$$



Beschleunigung:

Nicht die zeitliche, sondern die räumliche Änderung der Geschwindigkeit soll betrachtet werden. Wir fassen die Geschwindigkeit als Funktion von  $x(t)$  auf:

$$c = c(x) \quad \text{mit} \quad x = x(t)$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$\frac{dc}{dt} = c \frac{dc}{dx}$$

Masse:

$$dm = \left( \rho A + \frac{d(\rho A)}{2} \right) dx \approx \rho A dx$$

Impulsänderung nach Newton für die  $x$ -Richtung:

$$\Rightarrow \quad dm \frac{dc}{dt} = \rho A dx c \frac{dc}{dx}$$

Zwischenergebnis mit Kräftebilanz:

$$\Rightarrow -\frac{dp}{dx} - \frac{1}{A} \frac{d(\sigma_R A)}{dx} - \tau \frac{U}{A} = \rho c \frac{dc}{dx}$$

Abkürzung für die  $x$ -Komponente der Reibkraft:  $\frac{1}{A} \frac{d(\sigma_R A)}{dx} + \tau \frac{U}{A} = \frac{dr_{x^*}}{dx}$

$\Rightarrow$  Differentielle stationäre Impulsgleichung:

$$\boxed{-\frac{dp}{dx} - \frac{dr_x}{dx} = \rho c \frac{dc}{dx}}$$

\*) Das Verhältnis  $4A/U = \mathcal{D}$  wird hydraulischer Durchmesser genannt. Dieser ist so definiert, dass bei einem Rohr kreisförmigen Querschnitts  $D$  der hydraulische Durchmesser mit dem Durchmesser des Querschnitts übereinstimmt:

$$\mathcal{D} \equiv D$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man eine **Impulsbilanz** für die  $x$ -Richtung am Kontrollsystem durchführt.

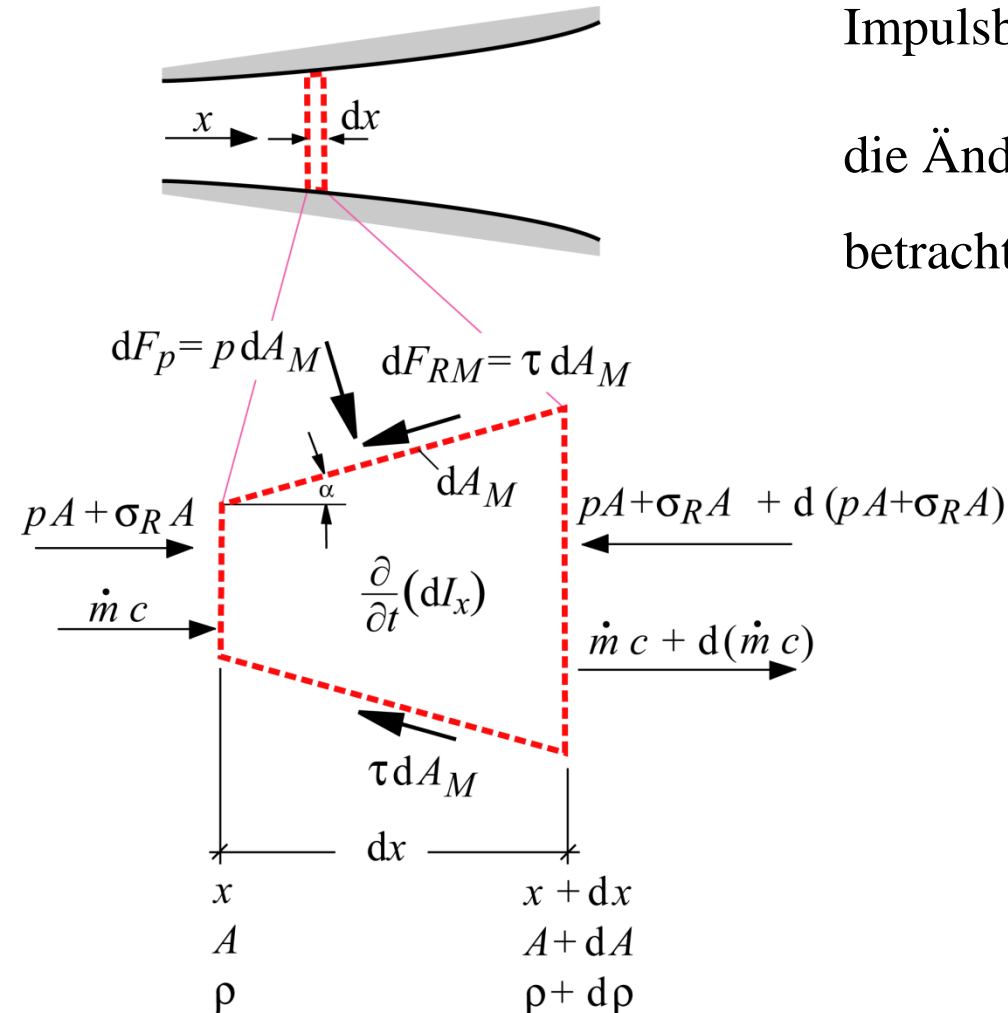
Impulsbilanz in Worten:

die Änderung der Impulskomponente  $I_x = mc$  der betrachteten Koordinatenrichtung ergibt sich aus

der Differenz von ein- und austretendem Impulsstrom

und

der Summe der Kräfte auf das Kontrollsystem in die betrachtete Koordinatenrichtung.



Also:

$$\frac{\partial}{\partial t}(dI_x) = \dot{m}c - (\dot{m}c + d(\dot{m}c) + pA + \sigma_R A - (pA + \sigma_R A + d(pA + \sigma_R A)) + dF_p \sin \alpha - \tau dA_m \cos \alpha,$$

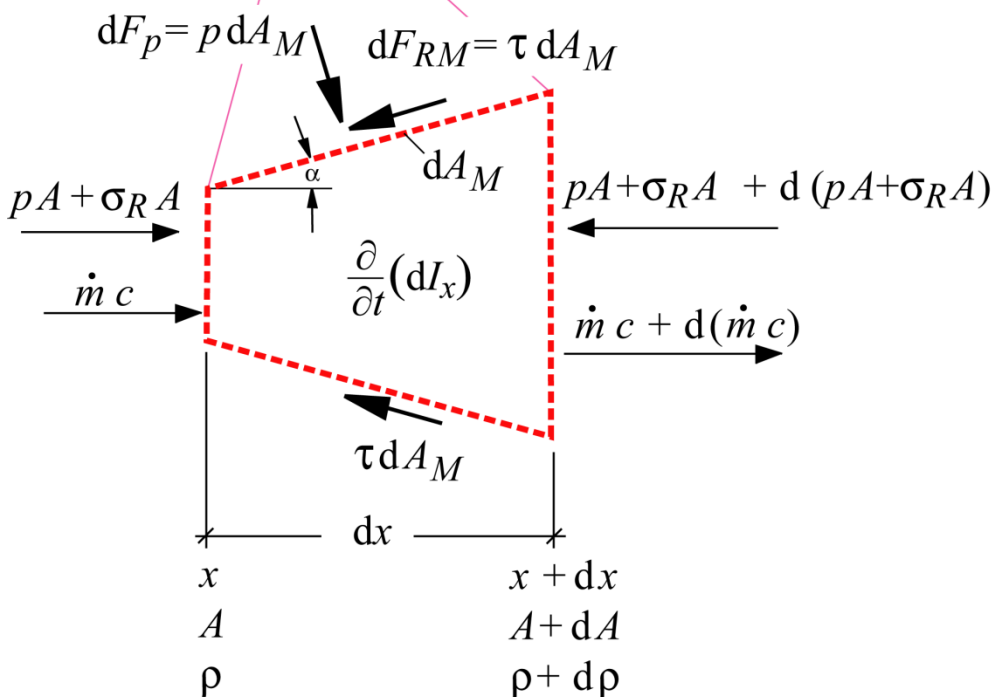
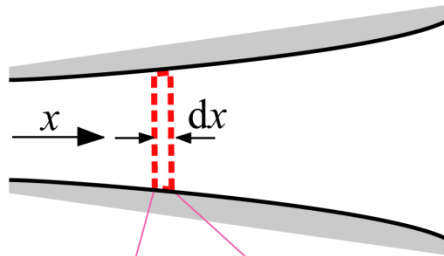
wobei im stationären Fall

$$\frac{\partial}{\partial t}(dI_x) = 0$$

gilt.

Wir erhalten wieder

$$-\frac{dp}{dx} - \frac{dr_x}{dx} = \rho c \frac{dc}{dx}$$



Bemerkung:

Die reibungsfreie Impulsgleichung mit  $dr_x = 0$  heißt auch **Eulergleichung**:  $-\frac{dp}{dx} = \rho c \frac{dc}{dx}$

Sie lässt sich für inkompressible Fluide,  $\rho = const$  (Einfluss von Temperatur, Druck und Geschwindigkeit auf die Dichte vernachlässigbar), unmittelbar in  $x$ -Richtung integrieren, da die Dichte nicht mehr vom Ort abhängt.

$$-\frac{dp}{dx} = \rho c \frac{dc}{dx} \quad \Rightarrow \quad -\Delta p = \rho \frac{\Delta c^2}{2}$$

Diese Gleichung wird **Bernoulli-Gleichung** genannt:

$$p + \frac{\rho}{2} c^2 = const$$

Wenn die Strömung einem konstanten Schwerfeld unterliegt, enthält der Druck noch hydrostatische Anteile. Die Bernoulli Gleichung lautet dann:

$$p + \frac{\rho}{2} c^2 + \rho g x = const$$

Für kompressible Strömungen in Kanälen konstanten Querschnitts kann mit der Kontinuitätsgleichung,

$$\rho c = \text{const}$$

die integrierte eindimensionale Eulergleichung abgeleitet werden:

$$\rho c^2 + p = \text{const}$$

Sie unterscheidet sich von der Bernoulli-Gleichung dadurch, dass der Faktor 1/2 nicht auftritt und das strikt eindimensionale Verhältnisse vorliegen müssen!

Dagegen darf die Bernoulli-Gleichung auf auch mehrdimensionale inkompressible Strömungen angewendet werden darf, wobei dann mit der Geschwindigkeit  $c$  der Betrag des Geschwindigkeitsvektors gemeint ist.

### 4.1.1.3 Stationäre Energiebilanz

Erster Hauptsatz für stationäre offene Systeme

Differentielle Energiegleichung:

$$\delta q + \delta w^t = dh + \frac{1}{2} dc^2 + g dz$$

Adiabat, ohne technische Arbeit:

$$dh + \frac{1}{2} dc^2 + g dz = 0$$

Beispiel:

Strömung eines idealen Gases aus einem sehr großen Behälter.

Ohne Änderungen der potentiellen Energie:

$$dz = 0$$

Keine technische Arbeit:

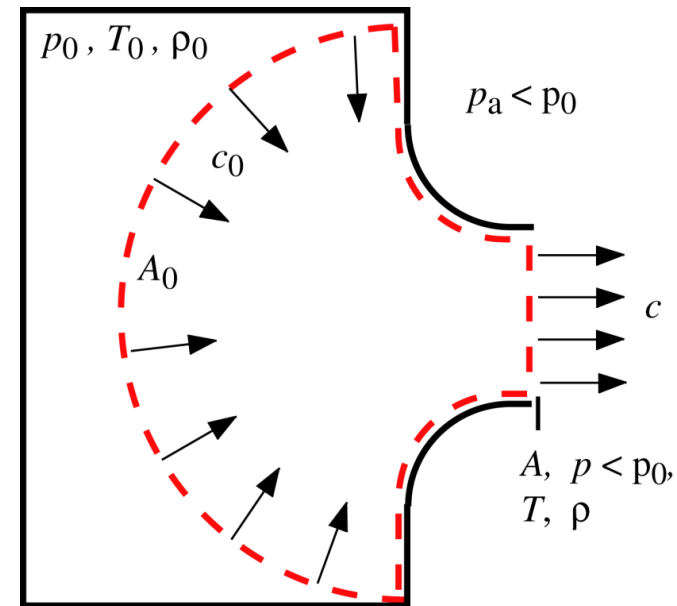
$$\delta w^t = 0$$

adiabat:

$$\delta q = 0$$

Die Zustände im Reservoir sollen sich im betrachteten Zeitraum nahezu nicht ändern:

$$A_0 \gg A \Rightarrow p_0 \approx \text{const}, c_0 \approx 0$$



Integral zwischen 0 und Düsenaustritt: 
$$h_0 - h = \frac{c^2 - c_0^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

Annahme: ideales Gas 
$$c_p = \text{const} \Rightarrow h_0 - h = c_p(T_0 - T)$$

$$\Rightarrow c^2 = 2 c_p T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)$$

Das Druckverhältnis lässt sich für reibungsbehaftete, adiabate Strömung eines ideales Gas konstanter Wärmekapazitäten einfach aus dem Temperaturverhältnis ermitteln:

- Polytrope Zustandsänderung mit passend gewähltem Polytropenexponenten  $n$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

- Isentrope Zustandsänderung mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa = c_p/c_v$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

jeweils mit der Ausströmbedingung<sup>1)</sup>

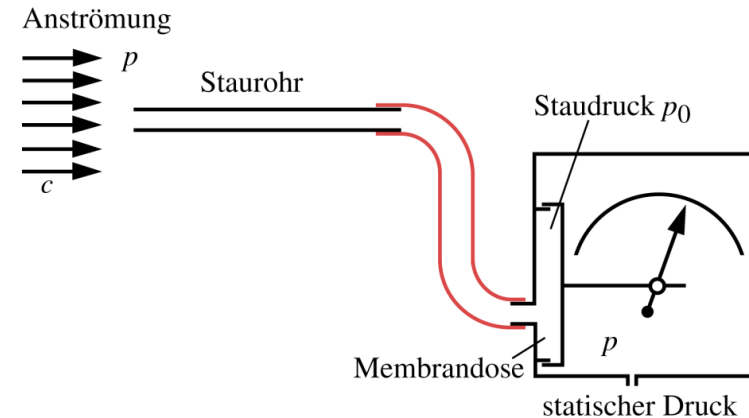
$$p = p_a$$



## Anwendungsbeispiel: Staudruckmessung zur Geschwindigkeitsmessung in Flugzeugen

Ein Staurohr (Pitotrohr) wird an einer geeigneten Stelle des Flugzeugs angebracht, meistens im Rumpfbug oder in der Seitenflosse, so dass es ungehindert von der Luft angeströmt werden kann.

Das Staurohr wird über eine Schlauchleitung mit der Membrandose im Fahrtmesser verbunden. Innerhalb des Instruments wird die Strömungsenergie durch angenähert isentrope Kompression in Druck umgewandelt.



Die elastische Membrandose wird durch die Druckdifferenz von Staudruck und ungestörtem Strömungsdruck (statischer Druck) gedehnt. Durch entsprechende Eichung der Anzeige kann aus der Druckdifferenz die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zur Luft angezeigt werden.

## Die aus thermischer Energie *maximal* erreichbare Geschwindigkeit

In der adiabaten, reibungsfreie Strömung lässt sich eine maximale Geschwindigkeit ableiten.

Aus 
$$c^2 = 2 c_p T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0}\right) \quad \text{und} \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

folgt mit  $p_a \rightarrow 0 \Leftrightarrow T \rightarrow 0$

$$c_{max} = \sqrt{2 c_p T_0} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} R T_0}, \quad \text{da} \quad c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1} R$$

**Rechenbeispiel zur maximalen erreichbaren Geschwindigkeit:**

$$p = 0, T = 0$$

$$R_{Luft} = 287 \text{ Nm}/(\text{kg K}), \kappa = 1,4, \vartheta_0 = 20^\circ \text{C}$$

$$c_{max} = \sqrt{2 \frac{1,4}{0,4} 287 \cdot 293} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 767 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dieser Wert ist größer als der Wert der Schallgeschwindigkeit, der bei dieser Temperatur in Luft ca. 343 m/s beträgt.

Dies bedeutet, dass es sich um eine Überschallströmung handeln *würde*.

## Begründung für den Konjunktiv im letzten Satz:

Ist für die Austrittsbedingungen  $p = 0$ ,  $T = 0$  und eine derart hohe Geschwindigkeit mit der dargestellten Düsenform erreichbar?

### Erfahrung:

- Die Schallgeschwindigkeit (vgl. Abschnitt 4.1.2) kann bei einer Ausströmung aus einer so **einfachen** Düse (Düse mit kontinuierlicher Querschnittsverjüngung) **nicht** überschritten werden (vgl. Abschnitt 4.1.3).
- Die Ausströmbedingung  $p = p_a$  wird nicht mehr eingehalten, wenn der Druck in der Umgebung unter einen bestimmten Wert abgefallen ist.

Um die Zusammenhänge zu klären, muss die Dichteänderung des Gases berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 4.1.3).

## 4.1.1.4 Stationäre Entropiebilanz

Entropiebilanz für stationäre offene Systeme

(differentiell oder integral entlang der Strömung)

$$ds = \frac{\delta q}{T} + ds_{\text{irr}}, \quad s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{\delta q}{T} + s_{\text{irr},12}$$

Der erste Term stellt die Entropieänderung durch Wärmeaustausch dar.

Der zweite Term erfasst alle Irreversibilitäten im System.

Dabei gilt der Zweite Hauptsatz:

$$s_{\text{irr},12} \geq 0$$

Mit der Entropiebilanz kann bei Kenntnis der Zustandsänderung  $s_2-s_1$  und des Austauschterms

$$s_{\text{aust}} = \int_1^2 \frac{\delta q}{T}$$

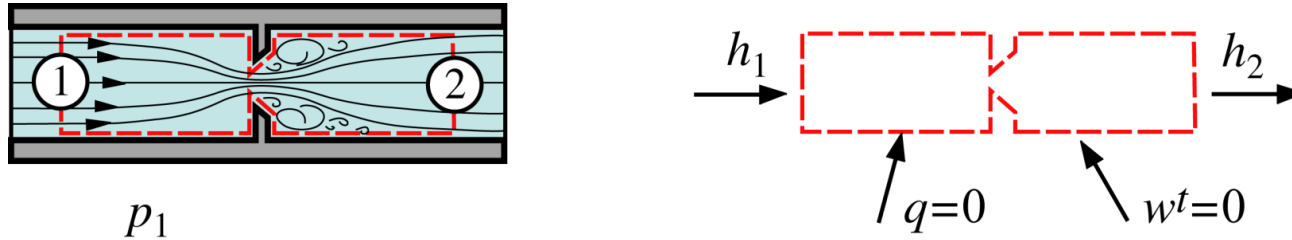
die Entropieproduktion  $s_{\text{irr}}$  bestimmt werden.

Sonderfall:

Adiabate Strömungen:  $ds = ds_{\text{irr}}$  oder  $s_{\text{irr},12} = s_2 - s_1$

Mit der Forderung des Zweiten Hauptsatzes können wichtige qualitative Aussagen über den Strömungsprozess und mögliche Zustandsänderungen getroffen werden.

## Beispiel: Adiabate Drossel



Wie ändert sich der Druck in Strömungsrichtung?

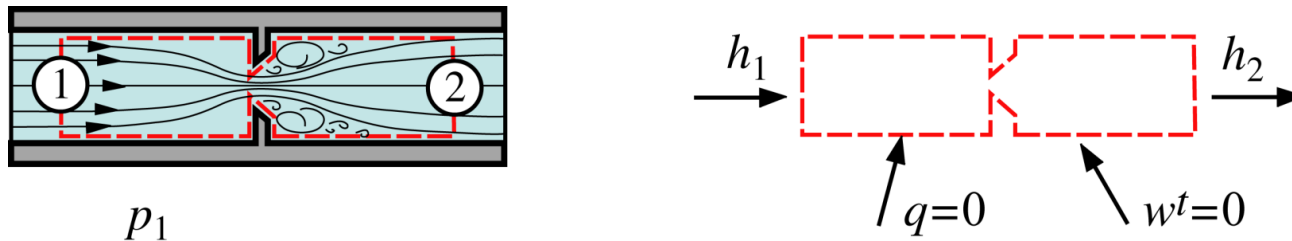
Lösung:

Der Erste Hauptsatz für das Bilanzsystem liefert unabhängig vom strömenden Medium für adiabate Zustandsänderung bei vernachlässigten äußeren Energien:

$$h_1 = h_2$$

Die Enthalpie bleibt über die Drosselstelle konstant.

## Beispiel: Adiabate Drossel (kont.)



Für die adiabate Strömung gilt ferner mit der Entropiebilanz:

$$s_{\text{irr},12} = s_2 - s_1$$

Die Integration der Fundamentalgleichung liefert für Strömungen idealer Gase

mit  $dh = 0$  und daher  $dT = 0$ :

$$s_2 - s_1 = -R \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$

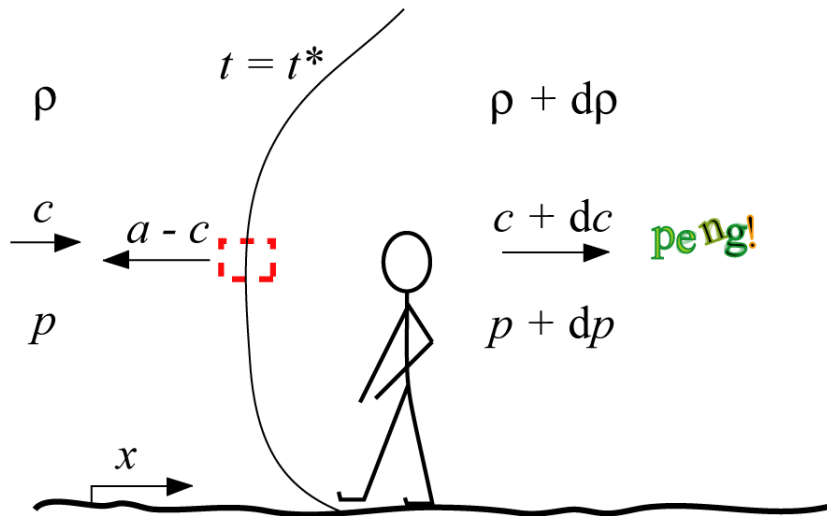
Die Forderung des Zweiten Hauptsatzes, dass  $s_{\text{irr},12} > 0$  sein muss, liefert für den Druck, dass er an der Drossel in Strömungsrichtung stets abnehmen muss:  $p_2 < p_1$



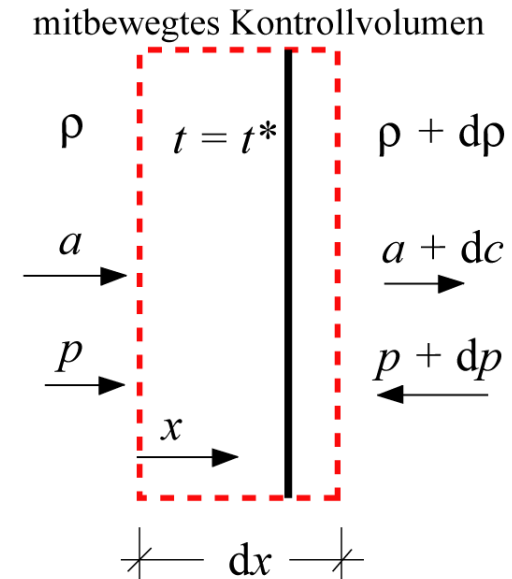
## 4.1.2 Die Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine kleine Druckströmung relativ zum Gas fortbewegt (vgl. auch 4.1.3-25 ff).

Instationäre Ausbreitung mit Geschwindigkeit  $a$  relativ zur Luft. Druckwelle bewegt sich vom ortsfesten Beobachter weg



Mit der Schallfront mitbewegtes Kontrollsystem  $\rightarrow$  stationäre Verhältnisse



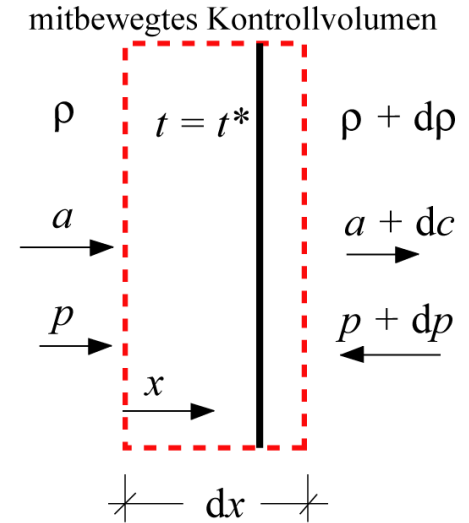
Massenbilanz im mitbewegten System:  $\frac{dm}{dt} = 0$

Einströmender Massenstrom:

$$\dot{m}_e = \rho a A$$

Ausströmender Massenstrom:

$$\dot{m}_a = (\rho + d\rho) (a + dc) A = (\rho a + \rho dc + a d\rho) A$$



Differenz zwischen ein- und ausströmendem Massenstrom bei stationären Verhältnissen:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_a = -(\rho dc + a d\rho) A = 0$$

$\Rightarrow$

$$\rho dc = -a d\rho$$

Impulsbilanz im mitbewegten System in  $x$ -Richtung:

Einströmender  $x$ -Impuls:  $\dot{m}_e a = \rho a A a$

austretender  $x$ -Impuls:  $\dot{m}_a (a + dc) = \dot{m}_e (a + dc)$

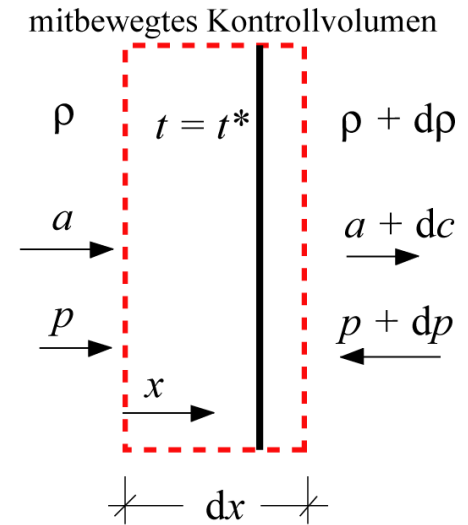
Differenz zwischen aus- und eintretendem Impuls:

$$\dot{m}_e (a + dc) - \dot{m}_e a = \dot{m}_e dc = \rho A a dc$$

Diese Impulsänderung wird durch die Kräfte auf den Bilanzraum bewirkt:

Kräfte in  $x$ -Richtung:  $\sum dF_x = -A dp$

$$\rho a dc = -dp \quad \text{oder} \quad \boxed{\rho dc = -\frac{1}{a} dp} \quad (\text{vgl. 4.1.1-6})$$



Kombination von Kontinuität und Impulsbilanz liefert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

Interpretation der Differentiale  $dp$  und  $d\rho$  :

Bei der Ableitung der Beziehung wurden reibungsfreie Bedingungen angesetzt ( $\leftarrow$  Impulsgleichung).

Beachtet man ferner, dass für einen nennenswerten Wärmeübergang keine Zeit verbleibt ( $\rightarrow$  adiabat), so erfolgt die Druckänderung isentrop:  $ds = 0$

Schallgeschwindigkeit:

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

Schallgeschwindigkeit für ideale Gase:

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

Spezialfall für ideales Gas:

isentropie Zustandsänderung:  $p v^\kappa = \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}$

Logarithmieren und ableiten:  $\ln p - \kappa \ln \rho = \ln(\text{const}) \Rightarrow \frac{dp}{p} = \kappa \frac{d\rho}{\rho}$

Schallgeschwindigkeit des idealen Gases:  $a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T}$

Luft (zweiatomiges Gas) bei  $\vartheta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ :

$$a = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 293} \text{ m/s} = 343 \text{ m/s}$$

Es ist interessant, die Schallgeschwindigkeit mit der mittleren Geschwindigkeit von Gasatomen oder -molekülen bei gegebenem Druck und gegebener Dichte zu vergleichen. Für den Zusammenhang zwischen Gasdruck und mittlerer Geschwindigkeit gilt nach der kinetischen Gastheorie:

$$p = \frac{1}{3} \rho \langle c^2 \rangle$$

Zahlenbeispiel:

Für einen typischen Druck  $p = 1$  bar und einer Gasdichte von etwa  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup> ergibt sich bei Umgebungstemperatur eine mittlere Geschwindigkeit von  $\sqrt{\langle c^2 \rangle} = 547$  m/s, die deutlich größer als die Schallgeschwindigkeit ist.

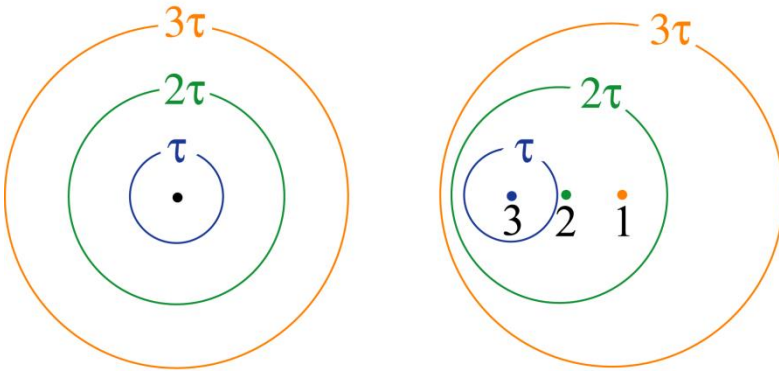
Die Gasatome bewegen sich im Mittel also deutlich schneller im Vergleich zu der Ausbreitung von schwachen Druckwellen (Schall) im Gas.

# Schallausbreitung einer bewegten Schallquelle

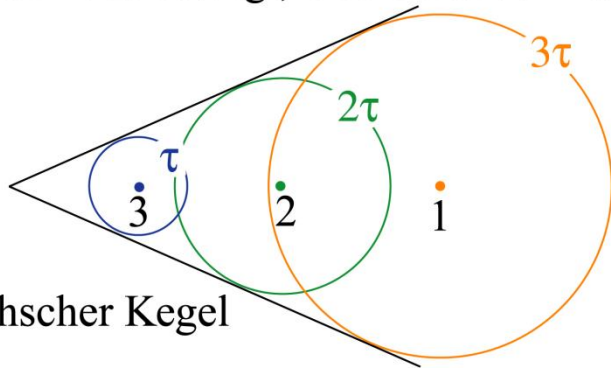
Schwingungszeit  $\tau$  und Frequenz  $\nu$ :  $\tau = 1/\nu$

1. ruhend

2. nach links bewegt, hoher Unterschall:  $c < a$



3. nach links bewegt, Überschall:  $c > a$



Machscher Kegel



Rekordversuch mit  
düsengetriebenem Landfahrzeug.  
Druckwelle erzeugt Markierung im  
Wüstensand.

On the original THRUST SSC site, several movies in AVI format were available. I sampled several and the one I enjoyed the most was the video of the final supersonic run as viewed by a camera in the tail. There is also sound with this so you can hear Andy Green (the pilot) calling off the speeds.

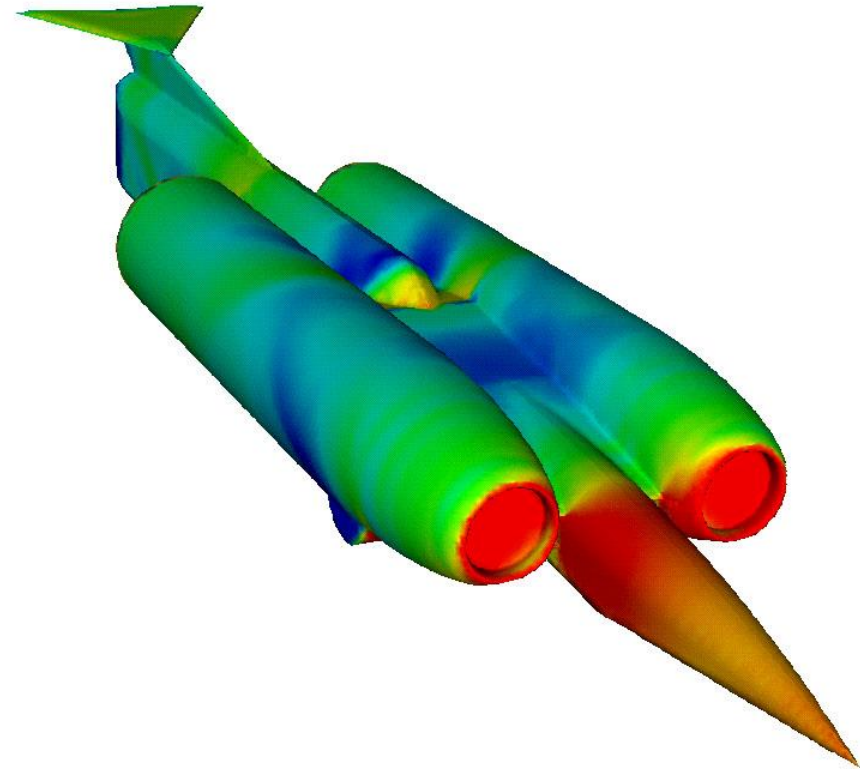
In the full-length version, the footage begins at a dead stop and records up through Mach 1 and then back to a stop again. Things to look for are the careening at about 600 mph. This is likely to be due to the well known change in the aerodynamics as one enters the transonic regime.

You can also see condensation vortices initiated near the engine inlets and a cloud of condensation rising up between and over the engines just as he punches it through the measured mile; the latter is associated with the Prandtl-Glauert singularity. Both condensation phenomena can be seen in the above screen cap. Once he lets off you can clearly see these clouds sweeping toward the front of the vehicle. It is interesting to compare the position of these clouds to the position of the blue (and presumably low pressure) areas seen in the CFD picture:

Once the speeds get up above 600 mph, there seems to be a definite difference in the background sound. I assume that this is due to the difference in the sound generated by turbulence, rather than the engine.

At about 450-500 mph the picture blacks out. Due to the large accelerations, this is only a short time. However, you can still hear the pilot calling out the speeds. Don't be alarmed.

**Courtesy: Professor M.S. Cramer, Engineering Science and Mechanics, 300 B Norris Hall, Virginia Tech**

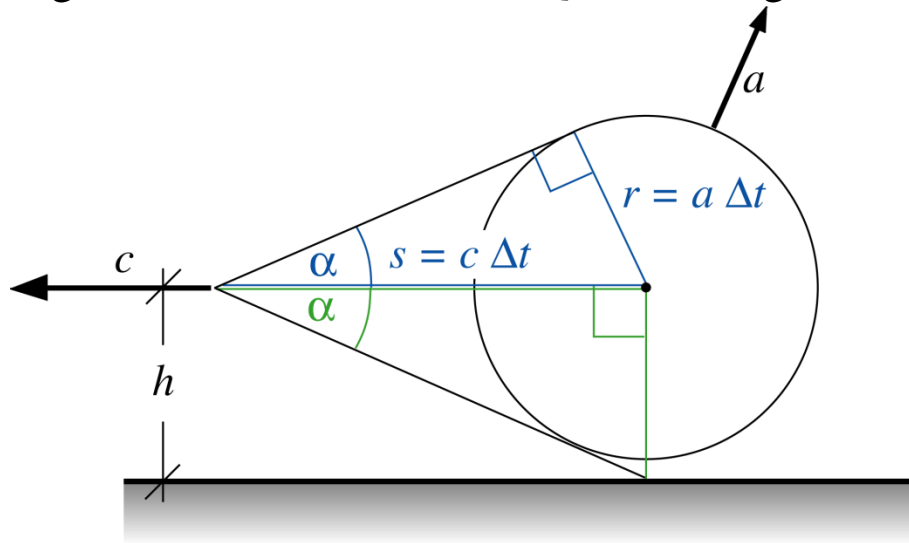






Eine Schallquelle bewege sich überschallschnell in der Höhe  $h$ . Es herrsche Windstille.

Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$  des Machschen Kegels und die Zeit  $\Delta t$ , die vergeht bis ein Beobachter am Boden die Schallquelle hört (Überschallknall). Die Zeit sei gemessen von dem Augenblick an, bei dem die Quelle sich gerade senkrecht über dem Beobachter befindet.



Öffnungswinkel des Machschen Kegels:

$$\sin \alpha = \frac{r}{s} = \frac{a}{c} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$$

Überflugszeit:

$$\frac{s}{h} = \cot \alpha = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{c \Delta t}{h}$$
$$\Rightarrow \Delta t = \frac{h}{c} \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1}$$

Bemerkung: Ist die Quelle ein ausgedehnter Körper, zum Beispiel ein Flugzeug, so erzeugt dies eine stärkere Störung. Der Winkel der Druckfront ist dann stets größer als der Machsche Winkel  $\alpha$  und über der Höhe  $h$  variabel. Die Druckfront ist dann gekrümmt und geht für große  $h$  asymptotisch in den Machschen Winkel über.

## Beispiele: Machscher Kegel beim Vorbeiflug im Überschall (Filme)



Auf der Wasseroberfläche sichtbare Druckwelle



Verzögerte Schallwahrnehmung beim Vorbeiflug

## Beispiel: Wolkenscheibeneffekt beim Überschallflug (Film)

Adiabatische Expansion feuchter Luft in der Unterdruckzone hinter dem Flugzeug



## Beispiel: Dopplereffekt

Bei einer bewegten Schallquelle nimmt der im Ausbreitungsmedium der Welle ruhende Beobachter bei der Vorbeibewegung eine deutliche Erniedrigung des Tons wahr. Bewegt sich die Schallquelle auf ihn zu, so verringert sich der Abstand  $\lambda_1$  der Wellenberge.

Ist  $\tau$  die Schwingungszeit dann ergibt sich:

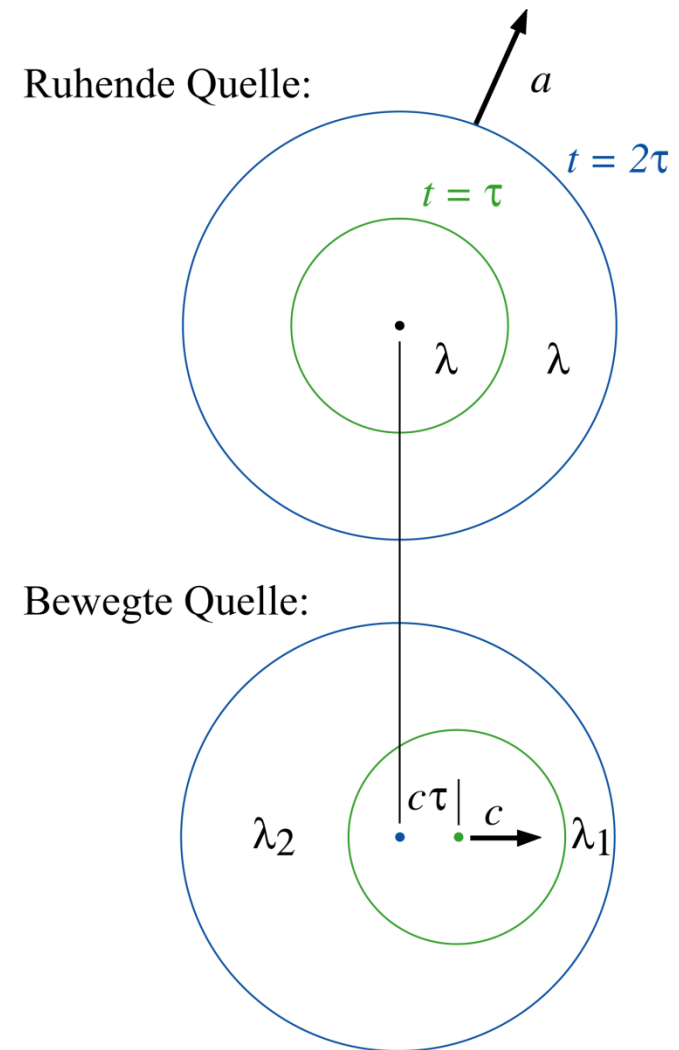
$$\lambda_1 = \lambda - \Delta\lambda = a\tau - c\tau = (a - c)\tau$$

$$\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda = (a + c)\tau$$

Hat sich das Objekt vorbei bewegt, vergrößert sich die Wellenlänge auf  $\lambda_2$ :

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda} = \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{c}{a}$$

Die relative Wellenlängenänderung  $\Delta\lambda/\lambda$  oder Frequenzänderung  $\Delta\nu/\nu$  wird **Dopplereffekt** genannt:



## Zusammenfassung

Stationäre, kompressible eindimensionale Strömung in Kanälen mit veränderlichem Querschnitt

Stationäre Massenbilanz: 
$$d(\rho A c) = 0$$

Stationäre Impulsbilanz mit Reibung: 
$$-dp - dr_x = \rho c dc$$

Stationäre Energiebilanz, adiabat ohne Zufuhr technischer Arbeit: 
$$dh + c dc + g dz = 0$$

Definition der Schallgeschwindigkeit: 
$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$